# LA TEORIA DEGLI INSIEMI

"Un *insieme* è una collezione di oggetti determinati e distinti della nostra percezione o del nostro pensiero concepiti come un tutto unico. Tali oggetti si dicono gli *elementi* dell'insieme." G. Cantor.

$x \in A$ significa "$x$ è un elemento dell'insieme A", $x \notin A$ significa "$x$ non è un elemento dell'insieme A"

| | | |
|---|---|---|
| Un insieme si può descrivere: | 1. Elencando gli elementi in qualunque ordine | $A = \{a, b, c, \dots\}$ |
| | 2. Definendo una proprietà | $A = \{x \in U \, ; \, x \text{ gode di } \wp\}$ |

L'unico insieme privo di elementi è l' *insieme vuoto*. $\varnothing = \{ \}$.

**Inclusione**

A è *sottoinsieme* di B ($A \subseteq B$) se $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ ; $\forall A$ vale $\varnothing \subseteq A$

| | | |
|---|---|---|
| Proprietà dell'inclusione | riflessiva | $A \subseteq A$ |
| | antisimmetrica | $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (insiemi *uguali*) |
| | transitiva | $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ |

**OPERAZIONI TRA INSIEMI**

| | | |
|---|---|---|
| Unione | $A \cup B = \{x \, ; \, x \in A \text{ aut } x \in B\}$ | |
| Intersezione | $A \cap B = \{x \, ; \, x \in A \text{ et } x \in B\}$ | $A \cap B = \varnothing \Rightarrow$ A e B sono *disgiunti* |
| Differenza | $A \setminus B = \{x \, ; \, x \in A \text{ et } x \notin B\}$ | |
| Differenza simmetrica | $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ | |
| Complementare | $C_A B = A \setminus B$ et $B \subseteq A$ | $C_u A = \{x \, ; \, x \notin A\}$ |
| Prodotto cartesiano | $A \times B = \{(a,b) \, ; \, a \in A \text{ et } b \in B\}$ | $A \times A = A^2$ |
| Potenza | P(A) = insieme delle parti = insieme di tutti i sottoinsiemi di A | |
| Partizione | = insieme di sottoinsiemi disgiunti la cui unione dà A. | |

**Proprietà delle operazioni tra insiemi**

| | | |
|---|---|---|
| - Commutativa | $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| - Associativa | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| - Idempotenza | $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ |
| - Assorbimento | $A \cup (A \cap B) = A$ | $A \cap (A \cup B) = A$ |
| - Distributiva | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |

| | | |
|---|---|---|
| Operaz. con l'ins. vuoto | $A \cup \varnothing = A$ | $A \cap \varnothing = \varnothing$ |
| Inclusione | $A \subseteq A \cup B$ | $A \cap B \subseteq A$ |
| | $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ | $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ |
| Differenza | $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ | $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ |
| Complementare | $C_A (C_A B) = B$ | $C_u A \subseteq C_U B \Rightarrow B \subseteq A$ |
| | $B \cup (C_A B) = A$ | $B \cap (C_A B) = \varnothing$ |
| - Leggi di De Morgan | $C_u (A \cup B) = C_u A \cap C_u B$ | $C_u (A \cap B) = C_u A \cup C_u B$ |

# RELAZIONI TRA INSIEMI

Si chiama *relazione* l'insieme $R \subseteq (A \times B)$
- si dice *dominio* di R l'insieme $\{a \in A ; \exists b \in B, (a,b) \in R\}$
- si dice *codominio* di R l'insieme $\{b \in B ; \exists a \in A, (a,b) \in R\}$
- si dice *relazione inversa* di R l'insieme $R' = \{(b,a) \in (B \times A); (a,b) \in (A \times B)\} \subseteq (B \times A)$

**Relazione di equivalenza**
E' una relazione che gode delle seguenti proprietà:

| | | |
|---|---|---|
| - Riflessiva | $(x,x) \in R$ | $x = x$ |
| - Simmetrica | $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ | $x = y \Rightarrow y = x$ |
| - Transitiva | $(x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ | $x = y, y = z \Rightarrow x = z$ |

Dato a, si dice *classe di equivalenza* l'insieme degli elementi $x$ tali che $(a,x) \in R$.
L'insieme *quoziente* di A (A/R) è l'insieme i cui elementi sono classi di equivalenza di A.

**Relazione d'ordine**
E' una relazione che gode delle seguenti proprietà:

| | | |
|---|---|---|
| - Riflessiva | $(x,x) \in R$ | $x \leq x$ |
| - Antisimmetrica | $(x,y) \in R, (y,x) \in R \Rightarrow x = y$ | $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ |
| - Transitiva | $(x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ | $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ |

L'ordinamento in A si dice *totale* se $\forall x,y \in A$ vale $x \leq y$ oppure $y \leq x$

**INSIEMI LIMITATI**
Dato l'insieme ordinato A e $\emptyset \neq B \subseteq A$
$x \in A$ è un maggiorante di B se $\forall b \in B$ vale $x \geq b$; se $x$ esiste, B è limitato superiormente
il più piccolo dei maggioranti (se esiste) si chiama estremo superiore di B (sup B)
se $x \in B$, $x$ è il massimo di B (max B)
$x \in A$ è un minorante di B se $\forall b \in B$ vale $x \leq b$; se $x$ esiste, B è limitato inferiormente
il più grande dei minoranti (se esiste) si chiama estremo inferiore (inf B)
se $x \in B$, $x$ è il minimo di B (min B)

*Teorema 1* Dato A ordinato e $\emptyset \neq B \subseteq A$, se $\exists$ max B $\Rightarrow \exists$ sup B e sup B = max B
Dato A ordinato e $\emptyset \neq B \subseteq A$, se $\exists$ min B $\Rightarrow \exists$ inf B e inf B = min B

**FUNZIONI TRA INSIEMI**
Dati gli insiemi A e B, f si dice *funzione* (o applicazione. trasformazione, corrispondenza) da A in B se:
- $f \subseteq (A \times B)$, dom f = A      f è una relazione di dominio A.
- $\forall a \in A, \exists!\, y \in A; (x,y) \in f$      $y$ è detto *immagine* di $x$

si scrive f: $A \rightarrow B$, $y = f(x)$. $f = g \Leftrightarrow$ dom f = dom g et $\forall x \in$ dom f, $f(x) = g(x)$
f: $A \rightarrow B$ è *suriettiva* (f da A su B) se $\forall y \in B, \exists\, x ; f(x) = y$
f: $A \rightarrow B$ è *iniettiva* se $\forall x,x' \in A, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
f: $A \rightarrow B$ è *biettiva* se è iniettiva e suriettiva: $\forall x,x' \in A, \forall y,y' \in B, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ ?????
*Teorema* f è invertibile = f ' è una funzione $\Leftrightarrow$ f è iniettiva
$I_A$: $A \rightarrow A$ è detta funzione *identità* se $\forall x \in A, I_A(x) = x$

**Funzioni composte**
Dati gli insiemi A, B, C e le funzioni f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow C$,
è detta *composta* la funzione $(g \circ f)$: $A \rightarrow C$ definita da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Proprietà:
- f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow C$, h: $C \rightarrow D$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$
- f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow C$ iniettive $\Rightarrow g \circ f$ iniettiva
- f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow C$ suriettive $\Rightarrow g \circ f$ suriettiva
- $\forall$f: $A \rightarrow B$, $f = f \circ I_A = I_B \circ f$
- f: $A \rightarrow B$ biettiva $\Rightarrow f' \circ f = I_A$ ; $f \circ f' = I_B$
- f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow A$, $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B \Rightarrow$ f biettiva, f = g
- f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow C$ biettive $\Rightarrow g \circ f$ biettiva, $(g \circ f)' = f' \circ g'$

**Immagini e controimmagini**

Data la funzione f: $A \to B$, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$

l'*immagine* di C mediante f è $f(C) = \{y \in B \; ; \; \exists \, x \in C, \; y = f(x)\}$

la *controimmagine* di D mediante f è $f\,'(D) = \{x \in A \; ; \; f(x) \in D\}$

$f(C) \subseteq B$, $f\,'(D) \subseteq A$. f(A) è il codominio di f. f suriettiva $\Leftrightarrow f(A) = B$

date le funzioni f: $A \to B$ e g: $B \to C$, valgono le seguenti proprietà:

1) $X \subseteq Y \subseteq A \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$; $X \subseteq Y \subseteq B \Rightarrow f\,'(X) \subseteq f\,'(Y)$
2) $X, Y \subseteq A \Rightarrow f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
3) $X, Y \subseteq A \Rightarrow f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$; se f è iniettiva si ha $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$
4) $X_i \subseteq B \Rightarrow$
5) $C \subseteq A, D \subseteq B \Rightarrow$
6) $C \subseteq A, D \subseteq B \Rightarrow$
7) $C \subseteq A, D \subseteq B \Rightarrow$
8) $C \subseteq A, D \subseteq B \Rightarrow$
9) $C \subseteq A, D \subseteq B \Rightarrow$
10) $C \subseteq A, D \subseteq B \Rightarrow$

**INSIEMI EQUIPOTENTI**

Gli insiemi A e B si dicono *equipotenti* se è possibile stabilire un'applicazione biettiva f: $A \to B$

L'equipotenza è una relazione di equivalenza: $A \equiv A$; $A \equiv B \Rightarrow B \equiv A$; $A \equiv B, B \equiv C \Rightarrow A \equiv C$