SUCCESSIONI e SERIE

SUCCESSIONE $(a_n) = a_1, a_2, \dots, a_n \quad n$

(a_n) convergente $\quad (a_n) \to L$ *se* $\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon : \forall n>N_\varepsilon \Rightarrow | a_n - L | < \varepsilon$

(a_n) divergente $\quad (a_n) \to \infty$ *se* $\forall M>0, \exists N : \forall n>N \Rightarrow a_n > M$

MONOTONIA

(a_n) crescente *se* $a_n \le a_n+1 \qquad (a_n)$ limitata superiormente $\Rightarrow (a_n) \to \sup (a_n)$

(a_n) decrescente *se* $a_n \ge a_n+1 \qquad (a_n)$ limitata inferiormente $\Rightarrow (a_n) \to \inf (a_n)$

LIMITI NOTEVOLI

$1/n \to 0 \qquad (1 + 1/n)^n \to e$

$\sqrt[n]{n} \to 1 \qquad (1 + 1/n)^{n+1} \to e$

$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (a>0)$

SERIE $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = s_1 , s_2 , s_3 \dots$ somma: $S = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

$\sum (ca_n + db_n) = c \sum a_n + d \sum b_n \quad \sum a_n , \sum b_n$ convergenti $\Rightarrow \sum (ca_n + db_n)$ convergente

CRITERI $(a_n,b_n >0)$

Confronto: $\sum a_n \ge \sum b_n$, $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow \sum b_n$ convergente

$\sum a_n$ divergente $\Rightarrow \sum b_n$ divergente

$\lim a_n/b_n = L > 0 \Rightarrow a_n \; b_n$ hanno stesso carattere

$\lim a_n/b_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n$ divergente $\Rightarrow \sum a_n$ divergente

Rapporto:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ convergente} \\ > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergente} \\ = 1 \Rightarrow \text{criterio inefficace} \end{cases}$$

Radice:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ convergente} \\ > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergente} \\ = 1 \Rightarrow \text{criterio inefficace} \end{cases}$$

Confronto con un integrale:

$f(x) > 0$ e decresc. su $[1,+\infty)$; $a_n = f(n) \Rightarrow \sum a_n , \int f(x)dx$ hanno lo stesso carattere

Teorema di Leibnitz: (a_n) monotona non crescente, $\lim (a_n) = 0 \Rightarrow \sum (-1)^{n-1} a_n$ convergente

SERIE NOTEVOLI

Geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \dots = \begin{cases} a / (1-x) & \textit{se } |x| < 1 \\ +\infty & \textit{se } x \ge 1 \\ \text{oscillante} & \textit{se } x \le -1 \end{cases}$$

Armonica semplice $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots = +\infty$

Armonica generalizzata

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n^\alpha = 1 + 1/2^\alpha + 1/3^\alpha + \dots = \begin{cases} \text{converge} & \textit{se } 0 \le \alpha \le 1 \\ +\infty & \textit{se } \alpha \ge 1 \end{cases}$$

Serie di Mengoli $\sum 1 / n(n+1) = 1$

Serie di Bertrand

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 / [x^n (\log n)^b] = \begin{cases} \text{converge} & \textit{se } \alpha>1 \textit{ aut } \alpha=1, \beta>1 \\ \text{diverge} & \textit{se } \alpha<1 \textit{ aut } \alpha=1, \beta\le1 \end{cases}$$

$(n=1,2,\dots +\infty) \qquad \sum \sin \pi/2^n \quad \sum k / n! \quad \sum n! / n^n \quad \sum a^n / n!$ (convergenti)

$(n=2,3,\dots +\infty)$

$$\sum \log n / n^\alpha \begin{cases} \text{converge} & \textit{se } \alpha>1 \\ \text{diverge} & \textit{se } \alpha<1 \end{cases}$$