8. ALGEBRA LINEARE

8.1 I SISTEMI DI EQUAZIONI

SOLUZIONE DI UN SISTEMA

Teorema

1) dato il sistema $f_j(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)= f_j(\mathbf{x},\mathbf{y})= 0$ $(j=1,...,m)$, tale che:
   f_j definite e continue in un intorno Ω (n+m)-dimensionale di $(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0)$ dello spazio dei punti $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, le loro derivate parziali del 1° ordine sono continue, lo jacobiano $D(f_1,... f_m)/D(f_1,... f_m) = \det |\partial f_i/\partial y_i| \neq 0$
   $M = \{ (\mathbf{x},\mathbf{y}) : f_j(\mathbf{x},\mathbf{y})= 0 \} \Rightarrow \forall b_0>0\ \exists\Delta = \{ |x_i-x_i^0|<a,\ |y_i-y_i^0|<b \}$ tale che $M\Delta$ è descritto dalle funzioni derivabili con continuità: $y_j = \psi_j(\mathbf{x})$
2) se alle ipotesi del teorema 1 aggiungiamo che f_j sono derivabili con continuità p volte in Ω, le funzioni $\psi_j(\mathbf{x})$ che risolvono i sistemi sono derivabili con continuità p volte in Δ

Proprietà delle soluzioni

le funzioni $y_i = \varphi_i(\mathbf{x},y_m)$ hanno le proprietà:

1) per i punti $(\mathbf{x}, \varphi_i(\mathbf{x},y_m),... \varphi_i(\mathbf{x},y_m),y_m)$ si verificano le prime n-1 equazioni del sistema
2) unicità: se $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$ verifica le prime m-1 equazioni del sistema, vale: $x_i = \varphi_i(\mathbf{x},y_m)$

Proprietà

1) data $\lambda(\mathbf{x})$ funzione derivabile con continuità in $\Delta^0= \{ |x_i-x_i^0|<a \}$, tale che per punti (n+1)-dimensionali si ha: $(\mathbf{x},\lambda(\mathbf{x}))\in\Delta'= \{ |x_i-x_i^0|<a,\ |y_m-y_m^0|<b \}$ $\Rightarrow$ le funzioni $\varphi_i(\mathbf{x},\lambda(\mathbf{x}))$ sono derivabili con continuità in Δ^0 e verificano le identità: $f_j(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x},\lambda(\mathbf{x})),..., \varphi_{m-1}(\mathbf{x},\lambda(\mathbf{x})), \lambda(\mathbf{x}))= 0$
2) data l'equazione $F(\mathbf{x},y_m)= f_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}_1,y_m),..., \varphi_{m-1}(\mathbf{x},y_m),y_m)= 0$, la funzione $F(\mathbf{x},y_m)$ ha le proprietà:
   a) $F(\mathbf{x},y_m)$ è definita in Δ' e ha derivate parziali continue
   b) $F(\mathbf{x}^0,y_m^0)= f_m(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0)= 0$
   c) $\partial F/\partial y_m \neq 0$ in Δ
3) $\exists$ in Δ^0 la funzione $y_m = \lambda(\mathbf{x})$ derivabile con continuità e tale che i punti $(\mathbf{x},\lambda(\mathbf{x}))$ dello spazio (n+1)-dimensionale verificano $F(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x}))=0$
4) se $(\mathbf{x},y_m)\in\Delta'$ e vale $F(\mathbf{x},y_m)=0$ è necessario che $\mathbf{x}\in\Delta^0$ e $y_m = \lambda(\mathbf{x})$

SISTEMA DI FUNZIONI DIPENDENTI

Sistema di funzioni dipendenti

dato un sistema di funzioni $y_j = f_j(\mathbf{x}) = f_j(x_1,...,x_n)$, $\mathbf{x}\in G$, derivabili con continuità in G, questo sistema dipende da G se almeno una funzione y_j si esprime in G mediante le funzioni: $y_m = \Phi(y_1,...,y_{j-1},y_{j+1},...,y_m)$, dove Φ è derivabile con continuità

Teoremi

1) $y_j = f_j(\mathbf{x})$ dipende da G $\Rightarrow$ i determinanti dell'n.esimo ordine generati da
$$\begin{vmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_m/\partial x_1 & \dots & \partial f_m/\partial x_n \end{vmatrix}$$
sono identicamente nulli in G
2) nel caso 1, se s è il più grande numero per cui in $\mathbf{x}^0$ un determinante non è nullo, $\exists$ un intorno di $\mathbf{x}^0$ in cui il sistema $f_1 ... f_s$ non è dipendente, mentre le funzioni $f_{s+1} ... f_m$ dipendono da $f_1 ... f_s$:
   $f_\lambda(\mathbf{x}) = \Phi_\lambda(f_1(\mathbf{x}),..., f_s(\mathbf{x}))$, $(\lambda=s+1,...m;\ \Phi_\lambda$ derivabili con continuità$)$

8.2 L'ALGEBRA VETTORIALE

POLINOMI	
Polinomio	$P_N(\mathbf{x}) = \Sigma\, a_k\, \mathbf{x}^k \quad (k_j < N,\ \mathbf{x}^k = x_1^{k1} \ldots x_n^{kn})$
OPERAZIONI	
Prodotto scalare	$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert \cos\alpha$
Prodotto vettoriale	$\lvert\, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\, \rvert = \lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert \sin\alpha$
VETTORI	
Lemma	dati $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ vettori di R_n ($m<n$), si ha: $\mathbf{a} = \Sigma\, \lambda_j\, \mathbf{b}_j \Leftrightarrow (\mathbf{c}, \mathbf{b}_j)=0 \Rightarrow (\mathbf{c},\mathbf{a})=0$ (cioè ogni vettore **c** ortogonale a tutti i $\mathbf{b}_j$ è ortogonale ad **a**)

8.3 LE APPLICAZIONI

APPLICAZIONI DEFINIBILI CON CONTINUITA'

Applicazione def. con contin.	$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, definita da un sistema di funzioni $y_j = \varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(x_1,\ldots,x_m)$ derivabili con continuità; $\mathbf{x}\in\Omega$; $\mathbf{y}\in\Omega'$
Immagine	$\Omega' = A(\Omega)$
Applicazione composta	date le equazioni: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\in\Omega$, $y_j = \varphi_j(\mathbf{x})$; $\mathbf{z} = B\mathbf{y}$, $\mathbf{y}\in\Lambda$, $z_j = \psi_j(\mathbf{y})$, se $\Omega\subset\Lambda$ ha senso l'applicazione composta $\mathbf{z} = BA\mathbf{x}$ derivabile con continuità e definita da $z_j = \psi_j\,(\varphi_1(\mathbf{x}),\ldots, \varphi_1(\mathbf{x}))$ jacobiani: $D(z_1,\ldots,z_m)/D(x_1,\ldots,x_m) = \det\lvert\partial z_i/\partial x_j\rvert = \det\lvert\partial z_i/\partial y_s\rvert \det\lvert\partial y_s/\partial x_j\rvert = [D(z_1,\ldots,z_m)/D(y_1,\ldots,y_m)]\ [D(y_1,\ldots,y_m) \ /\ D(x_1,\ldots,x_m)]$
Applicazione identica	$\mathbf{x} = BA\mathbf{x} \Rightarrow [D(x_1,\ldots,x_m)/D(y_1,\ldots,y_m)]\ [D(y_1,\ldots,y_m)\ /\ D(x_1,\ldots,x_m)] = 1$
Proprietà	data $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ derivabile con continuità e jacobiano $D(z_1,\ldots,z_m)/D(x_1,\ldots,x_m)\neq 0$, 1) l'immagine $\Omega' = A(\Omega)$ è un insieme aperto 2) Ω dominio $\Rightarrow \Omega'$ dominio 3) l'applicazione A è localmente biunivoca

8.4 I VETTORI DELLO SPAZIO

Vettore	**a** esprimibile nel sistema di coordinate rettangolari (x,y,z) con la terna di numeri (a_x, a_y, a_z) detti componenti di **a**
Modulo	$\lvert\mathbf{a}(t)\rvert = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2}$
Cambio coordinate	le componenti del vettore $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ nel sistema di coordinate rettangolari (x',y',z') sono date dalle trasformazioni: $\begin{cases} a_{x'} = \alpha_1\, a_x + \beta_1\, a_y + \gamma_1\, a_z \\ a_{y'} = \alpha_2\, a_x + \beta_2\, a_y + \gamma_2\, a_z \\ a_{z'} = \alpha_3\, a_x + \beta_3\, a_y + \gamma_3\, a_z \end{cases}$
Scomposizione	$\mathbf{a}(t) = \lvert\mathbf{a}(t)\rvert\, \boldsymbol{\omega}(t) = \alpha\, \boldsymbol{\omega}(t)$
Vettore unitario	$\boldsymbol{\omega}(t) = (\, a_1(t)/\alpha,\ a_2(t)/\alpha,\ a_3(t)/\alpha\,)$ $\mathbf{n} = (\cos\alpha\, ,\ \cos\beta\, ,\ \cos\gamma\,)$
Vettore regolare	$\mathbf{r}(t) = (\,\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)\,) \qquad t\in(a,b)$

OPERAZIONI

Prodotto scalare: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow$ **a** e **b** sono vettori ortogonali

Prodotto vettoriale: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y , a_z b_x - a_x b_z , a_x b_y - a_y b_x)$

DERIVATA DELLA FUNZIONE VETTORE

Derivata: $\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{r}/\Delta t$ giace sulla tangente alla curva

$|\mathbf{r}'|$ = limite di $|\Delta \mathbf{r}/\Delta t|$ per $\Delta t \to 0$

Proprietà: $d\mathbf{a}/dt = d(\alpha\, \boldsymbol{\omega}(t))/dt = (d\alpha/dt)\, \boldsymbol{\omega} + \alpha\, (d\boldsymbol{\omega}/dt)$

$d(\mathbf{a}, \mathbf{b})/dt = (\mathbf{a}, d\mathbf{b}/dt) + (d\mathbf{a}/dt, \mathbf{b})$

$|\mathbf{b}(t)| = c > 0 \Rightarrow (\mathbf{b}, d\mathbf{b}/dt) = 0 \Rightarrow$ **b** e $d\mathbf{b}/dt$ sono vettori ortogonali

$d(\mathbf{a} \times \mathbf{b})/dt = (\mathbf{a} \times d\mathbf{b}/dt) + (d\mathbf{a}/dt \times \mathbf{b})$

GRADIENTE

Gradiente di f: $\text{grad } f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$

Derivata di f in direzione **n**: f derivabile in $(x,y,z) \Rightarrow \exists$ la derivata nella direzione di **n**:

$\partial f/\partial \mathbf{n} = (\partial f/\partial x) \cos \alpha + (\partial f/\partial y) \cos \beta + (\partial f/\partial z) \cos \gamma = \text{grad}_n f$

(la derivata di f in (x,y,z,) nella direzione di **n** è uguale alla proiezione del gradiente di f in (x,y,z) nella direzione **n**)

$\forall \mathbf{n}$ si ha: $\partial f/\partial \mathbf{n} \leq |\text{grad } f|$

Proprietà del gradiente:

1) è un vettore di lunghezza uguale alla derivata massima in direzione $\partial f/\partial \mathbf{n}$ in (x,y,z)
2) è un vettore che, se ha lunghezza non nulla, è diretto come il vettore **n** lungo il quale la derivata $\partial f/\partial \mathbf{n}$ ha valore massimo

grad f è invariante (non dipende dal sistema di coordinate scelto)

Cambio coordinate: data la funzione $u = f(x,y,z)$, se $\text{grad } u = (\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z)$ nel sistema (x,y,z), le componenti di grad u nel sistema (x',y',z') sono date dalle trasformazioni:

$$\begin{cases} (\partial u/\partial x') = \alpha_1 (\partial u/\partial x) + \beta_1 (\partial u/\partial y) + \gamma_1 (\partial u/\partial z) \\ (\partial u/\partial y') = \alpha_2 (\partial u/\partial x) + \beta_2 (\partial u/\partial y) + \gamma_2 (\partial u/\partial z) \\ (\partial u/\partial z') = \alpha_3 (\partial u/\partial x) + \beta_3 (\partial u/\partial y) + \gamma_3 (\partial u/\partial z) \end{cases}$$

Operatore nabla: $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

è un operatore simbolico, trattato come se fosse un vettore reale, che mette in corrispondenza f derivabile in (x,y,z) con il gradiente di f

$\text{grad } f = \nabla f$ (prodotto simbolico del vettore ∇ per lo scalare f)

Cambio coordinate: se $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ nel sistema (x,y,z), le componenti di ∇ nel sistema (x',y',z') sono date dalle trasformazioni:

$$\begin{cases} (\partial/\partial x') = \alpha_1 (\partial/\partial x) + \beta_1 (\partial/\partial y) + \gamma_1 (\partial/\partial z) \\ (\partial/\partial y') = \alpha_2 (\partial/\partial x) + \beta_2 (\partial/\partial y) + \gamma_2 (\partial/\partial z) \\ (\partial/\partial z') = \alpha_3 (\partial/\partial x) + \beta_3 (\partial/\partial y) + \gamma_3 (\partial/\partial z) \end{cases}$$