4. FUNZIONI

4.1 LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE

FUNZIONE

Funzione monodroma	f tale che ad ogni $x \in E$ corrisponde un solo $y=f(x)$ E = dominio di definizione di f x = argomento (variabile indipendente) y = funzione (variabile dipendente)
Funzione polidroma	f tale che ad ogni $x \in E$ corrisponde un insieme di numeri $y=f(x)$
Immagine	$f(E)=E_1 \subset A : y=f(x) \in E_1$ (f applica E in A e applica E su E_1)
Grafico in un intervallo	Γ, tale che $y=f(x)$ è ordinata dell'intersezione di Γ con la perpendicolare all'asse delle x passante per il punto di ascissa $x \in [a,b]$
Operazioni	$f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ con $g(x) \neq 0$
Funzione composta	$z = f_1 (f_2 (\ldots(f_N (x))\ldots))$ tale che z applica E su E_n date f_1 che applica E su E_1, f_2 che applica E_1 su E_2, …, f_N che applica E_{N-1} su E_N
Funzioni pari e dispari	f pari se $f(-x) = f(x)$ (il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y) f dispari se $f(-x) = -f(x)$ (il grafico è simmetrico rispetto all'origine) Il prodotto di due funzioni pari o due funzioni dispari è pari Il prodotto di una funzione pari per una dispari è dispari
Rappresentazione implicita	$F(x,y)=0$ definisce implicitamente una funzione $y=\varphi(x)$ ed una funzione $x=\psi(y)$; si dice che $x=\psi(y)$ è l'inversa di $y=\varphi(x)$

MONOTONIA

Funzione non decrescente	$x'<x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x'')$	f strettamente crescente se $x'<x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$
Funzione non crescente	$x'<x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x'')$	f strettamente decrescente se $x'<x'' \Rightarrow f(x') > f(x'')$

FUNZIONE INVERSA

Funzione inversa	$x=f^{-1}(y)$ su E' tale che $y=f(x)$ su E, $E'=f(E)$ f rigorosamente monotona $\Rightarrow x=f^{-1}(y)$ monodroma f strettamente crescente in E $\Rightarrow f^{-1}$ strettamente crescente su E' $f^{-1}(f(x))=x,\ x \in E$; $f(f^{-1}(y))=y,\ x \in E'$

4.2 LO STUDIO DI UNA FUNZIONE IN UN INTERVALLO

Monotonia	$f'(x) >0 \Rightarrow f$ crescente in x $f'(x) <0 \Rightarrow f$ decrescente in x
Teorema di Fermat	$\exists\ f'(x)$, f ha in x un estremo locale (massimo o minimo) $\Rightarrow f'(x) = 0$
Teorema di Rolle	$f(x)$ continua in [a,b] e derivabile in [a,b], $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\ c \in (a,b) : f'(c)=0$

Teorema della media (Cauchy) $\varphi(x)$ $\psi(x)$ continue in [a,b] e derivabili in (a,b), φ ψ non si annullano contemporaneamente, $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0 \Rightarrow \exists\, c\in(a,b) : \dfrac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{\psi'(c)}{\varphi(c)}$

Teorema d. media (Lagrange) $f(x)$ continua in [a,b] e derivabile in (a,b) $\Rightarrow \exists\, c\in(a,b) : f(b)-f(a) = (b-a)\, f'(c)$

Teoremi

1) $f(x)$ continua in [a,b], $f'>0$ in (a,b) $\Rightarrow$ f cresce strettamente in [a,b]
   $f(x)$ continua in [a,b], $f'\geq 0$ in (a,b) $\Rightarrow$ f non decresce in [a,b]
2) $f'(x)=0$ in [a,b] $\Rightarrow$ f costante in [a,b]
3) $f(x)$ continua in $U(x_0)$
   $f'(x)\leq 0$ a sinistra di x_0, $f'(x)\geq 0$ a destra di x_0 $\Rightarrow$ x_0 minimo locale di f
   $f'(x)\geq 0$ a sinistra di x_0, $f'(x)\leq 0$ a destra di x_0 $\Rightarrow$ x_0 massimo locale di f
4) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ $\Rightarrow$ x_0 minimo locale di f
   $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ $\Rightarrow$ x_0 minimo locale di f
5) $f''(x)$ continua in x_0 , $f''(x_0)>0$ $\Rightarrow$ f ha in x_0 una convessità verso il basso
   $f''(x)$ continua in x_0 , $f''(x_0)<0$ $\Rightarrow$ f ha in x_0 una convessità verso l'alto
6) $f'''(x)$ continua in x_0 , $f''(x_0)=0$ $\Rightarrow$ f ha in x_0 un punto di flesso
   $f''(x)$ continua in x_0 , $f''<0$ $\Rightarrow$ f ha in x_0 una convessità verso l'alto
7) $f(x)$ continua in [a,b], $f''\leq 0$ in (a,b) $\Rightarrow$ f convessa verso l'alto in [a,b]
   $f(x)$ continua in [a,b], $f''\geq 0$ in (a,b) $\Rightarrow$ f convessa verso il basso in [a,b]

8) $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(k)}(x_0) = 0$; $f^{(k+1)}(x)$ continua in x_0 , $f^{(k+1)}(x_0)\neq 0$:
   k dispari, $f^{(k+1)}(x_0)<0$ $\Rightarrow$ f convessa verso l'alto
   k dispari, $f^{(k+1)}(x_0)>0$ $\Rightarrow$ f convessa verso il basso
   k pari $\Rightarrow$ x_0 punto di flesso
   $f'(x_0)=0$, k dispari, $f^{(k+1)}(x_0)<0$, $\Rightarrow$ x_0 massimo di f
   $f'(x_0)=0$, k dispari, $f^{(k+1)}(x_0)<0$, $\Rightarrow$ x_0 minimo di f

CLASSIFICAZIONE DELLE FUNZIONI IN UN INTERVALLO

[Arbitrarie $\supset$ Continue $\supset$ Con $f^{(n)}$ $\supset$ Con $f^{(n)}$ continua $\supset$ Con $f^{(n)}$ $\forall n$ $\supset$ Analitiche]

Funzione analitica f sviluppabile in serie di Taylor in potenze di (x−a) (che converge ad f in U(a))

ASINTOTI $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = a$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax) = b \Rightarrow y=ax+b$ asintoto per $x\to+\infty$

$\exists \lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty \Rightarrow x=a$ asintoto

4.3 L' ORDINE E L'EQUIVALENZA DI FUNZIONI

Ordine di una funzione
$f(x) = O(\varphi(x))$ su E $\Leftrightarrow$ $|f(x)| \leq C|\varphi(x)|$ su E (C>0)
$f(x) = O(1)$ su E $\Leftrightarrow$ $f(x)$ limitata su E
$f(x) = O(\varphi_1(x))$ su E, $\varphi_1(x) = O(\varphi_2(x))$ su E $\Rightarrow$ $f(x) = O(\varphi_2(x))$ su E

O grande
$f(x) = O(\varphi(x))$ $(x\to a)$ $\Leftrightarrow$ $\exists U(a) : f(x) = O(\varphi(x))$ per $x\in U(a)\setminus\{a\}$
$f(x) = O(\varphi(x))$ $(x\to a)$ $\Leftrightarrow$ $f(x)/\varphi(x)$ limitato ($\varphi(x)\neq 0$)

o piccolo
$f(x) = o(\varphi(x))$ $(x\to a)$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = e(x)\,\varphi(x)$ ($e(x)\to 0$ per $x\to a$)
$f(x) = o(\varphi(x))$ $(x\to a)$ $\Leftrightarrow$ $\lim f(x)/\varphi(x) = 0$ $(x\to a)$

$f(x) = o(\varphi(x))$ $(x\to a)$, $\varphi(x) = O(\psi(x))$ $(x\to a)$ $\Rightarrow$ $f(x) = o(\psi(x))$ $(x\to a)$

Esempi
$(x\to+\infty)$ $x = o(x^2)$; $x^n = o(e^x)$; $\log x = o(x)$
$(x\to 0)$ $x^2 = o(x)$; $x = O(\sin x)$

Funzioni equivalenti

$f_1(x) \approx f_2(x)$ $(x\to a)$ $\Leftrightarrow$ $f_1(x), f_2(x)$ def. in $\in U(a)\setminus\{a\}$, $\lim f_1(x)/f_2(x) = 1$ $(x\to a)$

1) $f_1(x)\approx f_2(x)$ $(x\to a)$ $\Leftrightarrow$ $f_1(x) = f_2(x) + o(f_2(x))$ $(x\to a)$ $(f_2(x)\neq 0,\ x\neq a)$
$f_1(x)\approx f_2(x)$ $(x\to a)$ $\Leftrightarrow$ $f_2(x)\approx f_1(x)$ $(x\to a)$

2) $f_1(x), f_2(x), \Lambda(x)$ def. in $\in U(a)\setminus\{a\}$, $f_1(x)\approx f_2(x)$ $(x\to a)$ $\Rightarrow$
$\lim f_1(x)\Lambda(x) = \lim f_2(x)\Lambda(x)$ $(x\to a)$ (se esistono)

Fattore di potenza principale

ax^m fattore di potenza principale di $\varphi(x)$ $\Leftrightarrow$ ax^m, $a\neq 0$: $\varphi(x) \approx ax^m$

ax^m, bx^m $(a,b\neq 0)$ f.p.p. di $f(x)$ e $\varphi(x)$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{(x\to 0)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{(x\to 0)} \frac{ax^m}{bx^m} = \begin{cases} a/b & (m=n) \\ 0 & (m>n) \\ \infty & (m<n) \end{cases}$

EQUIVALENZE NOTEVOLI

$\sqrt[n]{1+x} - 1 \approx x/n$	$(x\to 0,\ n=1,2,\ldots)$	$\sin x \approx x$	$(x\to 0)$
$e^x - 1 \approx x$	$(x\to 0)$	$1 - \cos x \approx x^2/2$	$(x\to 0)$
$\log(1+x) \approx x$	$(x\to 0)$	$\tan x \approx x$	$(x\to 0)$

4.4 LO SVILUPPO DI UNA FUNZIONE CON LA FORMULA DI TAYLOR

Sviluppo di un polinomio in potenze di x−a

$$P(x) = b_0+b_1x+\ldots+b_n x^n = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Polinomio di Taylor di f

f definito e derivabile $(n-1)$ volte in $U(a)$:

$$Q_{n-1}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

Formula di Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

Resto (forma di Lagrange) $\quad R_n = \dfrac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a+\vartheta(x-a))$ $\quad (0<\vartheta<1)$

Resto (forma di Cauchy) $\quad R_n = \dfrac{(x-a)^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\vartheta(x-a))$ $\quad (0<\vartheta<1)$

Formula di Taylor (r. di Peano)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Formula di Maclaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

Resto (forma di Lagrange) $\quad R_n = \dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(\vartheta x)$ $\quad (0<\vartheta<1)$

Resto (forma di Cauchy) $\quad R_n = \dfrac{x^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\vartheta x)$ $\quad (0<\vartheta<1)$

Teoremi

1) f ha derivate continue in $[a,x]$ fino a $(n-1)$ ordine, f ha derivata n-esima in (a,b) $\Rightarrow$ n-esimo resto della formula di Taylor si può scrivere nella forma di Lagrange o di Cauchy
2) f ha derivate continue di ordine n in a $\Rightarrow$ f si sviluppa secondo la formula di Taylor con il resto nella forma (unica!) di Peano.

Funzioni pari e dispari

$f(x)$ pari $\Rightarrow$ tutti i termini dello sviluppo hanno x^{2n}
$f(x)$ dispari $\Rightarrow$ tutti i termini dello sviluppo hanno x^{2n+1}

4.5 LE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Funzione	f tale che a $(x,y)\in E$ corrisponde $z=f(x,y)$ In uno spazio tridimensionale rappresenta il luogo dei punti $(x,y,f(x,y))$ le cui proiezioni appartengono ad E
Formula di Taylor	$f(x,y) = f(x_0,y_0) + [(\partial f/\partial x)_0 (x-x_0) + (\partial f/\partial y)_0 (y-y_0)] + ½ [(\partial^2 f/\partial x^2)_0 (x-x_0)^2 +$ $+ (\partial^2 f/\partial x\partial y)_0 (x-x_0) (y-y_0) + (\partial^2 f/\partial y^2)_0 (y-y_0)^2] + \ldots$
Formula di Taylor (l=2)	$f(x,y) = f(x_0,y_0) + ½ (A\, \xi_x^2 + 2B\, \xi_x \xi_y + C\, \xi_y^2) + \varepsilon\rho^2$ $A = (\partial^2 f/\partial x\partial y)_0$; $B = ½ (\partial^2 f/\partial x\partial y)_0$; $C = (\partial^2 f/\partial y^2)_0$
Estremo locale	data $f(x,y)$ con derivate prime nulle in (x_0,y_0): 1) $A>0 \quad AC-B^2>0 \Rightarrow f$ ha massimo locale in (x_0,y_0) 2) $A<0 \quad AC-B^2>0 \Rightarrow f$ ha minimo locale in (x_0,y_0) 3) $AC-B^2=0 \Rightarrow$ non si sa se f ha estremo locale 4) $AC-B^2<0 \Rightarrow$ non esiste un estremo locale

4.6 LE FUNZIONI DI n VARIABILI

Funzione	f tale che a $(x_1,\ldots,x_n)\in E$ corrisponde $z=f(x_1,\ldots,x_n) \quad n\in\mathbb{N}$
Rappresentazione implicita	$F(x_1,\ldots,x_n)=0$ definisce implicitamente una funzione $x_n=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})$
ESTREMI DI UNA FUNZIONE	
Estremo locale	f ha massimo locale in $\mathbf{x}_0 \Leftrightarrow f$ definita in $\mathbf{x}_0$, $\exists\delta>0 : \lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\rvert<\delta$ vale: $f(\mathbf{x})\le f(\mathbf{x}_0)$ f ha minimo locale in $\mathbf{x}_0 \Leftrightarrow f$ definita in $\mathbf{x}_0$, $\exists\delta>0 : \lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\rvert<\delta$ vale: $f(\mathbf{x})\ge f(\mathbf{x}_0)$ f ha estremo locale in $\mathbf{x}_0 \Leftrightarrow$ le derivate prime parziali di f in $\mathbf{x}_0$ sono nulle: $(\partial f/\partial x_i)_0 = (\partial f/\partial x_i) (x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0$
Estremo locale relativo	date $f, \varphi_1,\ldots,\varphi_m$ definite su Ω, $E = \{ \mathbf{x} : \varphi_j(\mathbf{x})=0, j=1,\ldots,m \}$, si ha: $\mathbf{x}^0$ massimo locale relativo di $f \Leftrightarrow \varphi_j(\mathbf{x})=0$, $\exists\delta>0 : \lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\rvert<\delta$ vale $f(\mathbf{x})\le f(\mathbf{x}^0)$ $\mathbf{x}^0$ minimo locale relativo di $f \Leftrightarrow \varphi_j(\mathbf{x})=0$, $\exists\delta>0 : \lvert\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\rvert<\delta$ vale $f(\mathbf{x})\ge f(\mathbf{x}^0)$
Punto stazionario	$\mathbf{x}^0$ punto stazionario di $f \Leftrightarrow df = \Sigma(\partial f/\partial x_k)_0\, dx_k = 0$ per tutti i dx_k tali che: $\Sigma(\partial,\varphi_k/\partial x_k)_0\, dx_k = 0 \quad (\varphi_j(\mathbf{x})=0, j=1,\ldots,m, k=1,\ldots,n))$
Metodo dei moltiplicatori di Lagrange	per trovare gli estremi relativi di f: 1) si trova l'insieme Ω in cui $f,\varphi_1,\ldots, \varphi_m$ hanno derivate parziali continue e in cui rango $\lvert (\partial\varphi_k/\partial x_k \rvert = m$ 2) data la lagrangiana $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \Sigma\, \lambda_j\, \varphi_j(\mathbf{x})$; λ_j = moltiplicatori di Lagrange si risolve nelle incognite $x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ il sistema: $\begin{cases} \partial F/\partial x_k = (\partial f/\partial x_k) - \Sigma\, \lambda_j\, (\partial\varphi_j/\partial x_k) = 0 \quad (k=1,\ldots,n) \\ \varphi_j(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$ alle soluzioni $(x_1^0,\ldots,x_n^0,\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0)$ corrispondono i punti stazionari $\mathbf{x}^0$ 3) nel punto stazionario $\mathbf{x}^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$ vale: $df_0 = \Sigma_j\, \Sigma_k\, (\partial^2 F/\partial x_j\partial x_k)_0\, dx_j\, dx_k = d^2F_0$ $d^2F_0 > 0 \Rightarrow \mathbf{x}$ minimo relativo locale di f $d^2F_0 < 0 \Rightarrow \mathbf{x}$ massimo relativo locale di f

4.7 LO SVILUPPO DI FUNZIONI DI n VARIABILI CON LA FORMULA DI TAYLOR

Funzione ausiliare

$F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))$

Formula di Taylor

data $f(\mathbf{x})$ con derivate parziali continue fino alla l-esima, con $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta$, vale:

$$f(\mathbf{x}) = F(1) = \sum (1/k!)\, F^{(k)}(0) + (1/l!)\, F^{(l)}(\vartheta) \quad (k=0,1,\dots,l-1;\ 0<\vartheta<1),\ \text{cioè:}$$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{K=0}^{l-1} (1/k!) \sum_j \sum_k (x_{j1}-x_{j1}^0)\dots(x_{jl}-x_{jl}^0)\,(\partial^k f(\mathbf{x}_0)/\partial x_{j1}\dots\partial x_{jk}) + R_l(\mathbf{x})$$

Resto in forma di Lagrange

$$R_l(\mathbf{x}) = (1/l!) \sum_{j1} \sum_{jl} (x_{j1}-x_{j1}^0)\dots(x_{jl}-x_{jl}^0)\,(\partial^l f(\mathbf{x}_0+\vartheta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) / \partial x_{j1}\dots\partial x_{jk}$$

Formula di Taylor (concisa)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|<l-1} ((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}}/\mathbf{k}!)\, f^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}_0) + R_l(\mathbf{x})$$

$$R_l(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=l} ((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}}/\mathbf{k}!)\, f^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}_0+\vartheta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) \quad (0<\vartheta<1)$$

$|\mathbf{k}| = \sum k_j$; $\mathbf{k}! = k_j! \dots k_n!$; $f^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}) = \partial^{|\mathbf{k}|} f/(\partial x_1^{k1} \dots \partial x_n^{kn})$;

$(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} = (x_1-x_1^0)^{k1}\dots(x_n-x_n^0)^{kn}$

Formula Taylor ($l=1$)

$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + R_1$; $R_1 = \sum (\partial f/\partial x_i)_{\mathbf{x}_0+\vartheta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}\,(x_j - x_j^0)$

(generalizzazione degli incrementi di Lagrange nel caso n-dimensionale)

Formula Taylor ($l=2$)

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum (\partial f/\partial x_i)_0\,(x_j - x_j^0) + R_2$$

$$R_2 = \tfrac{1}{2} \sum_j \sum_k (\partial^2 f/\partial x_j \partial x_k)_{\mathbf{x}_0+\vartheta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}\,(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_j \sum_k (\partial^2 f/\partial x_j \partial x_k)_0\,(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) - \varepsilon\rho^2 \quad (\varepsilon\to 0 \text{ per } \rho^2=\Sigma(x_i - x_i^0)^2 \to 0)$$

ponendo $a_{jk} = (\partial^2 f/\partial x_j \partial x_k)_0$ e $\xi_i = (x_i - x_i^0)$, si può scrivere:

$A(\xi) = \sum_j \sum_k a_{jk}\, \xi_j\, \xi_k$ (forma quadratica di n variabili)

$\xi_k = dx_k \Rightarrow A(\xi) = d^2 f_o$

Resto in forma integrale

$$R_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{(l-1)!} \int_0^1 (1-u)^{l-1} \sum_{j1} \sum_{jl} (x_{j1}-x_{j1}^0)\dots(x_{jl}-x_{jl}^0)\, \frac{\partial^l f(\mathbf{x}_0+\vartheta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial x_{j1}\dots\partial x_{jk}}\, du$$

$$R_l(\mathbf{x}) = l \sum_{|\mathbf{k}|=l} \int_0^1 ((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}}/\mathbf{k}!)\,(1-u)^{l-1} f^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}_0+u(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))\, du$$

Form. Taylor, resto di Peano

$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|\le N} a_{\mathbf{k}}\, (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} + o(\rho^N) \quad (\rho=[\Sigma(x_i - x_i^0)^2]^{1/2} \to 0)$

$a_{\mathbf{k}} = a_{k1\dots kn}$; $|\mathbf{k}| = \Sigma k_j$; $(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{k}} = \Pi(x_i - x_i^0)^{ki}$

RICERCA DEGLI ESTREMI DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO MEDIANTE LO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

Estremi locali e segno di $A(\xi)$

data f con derivate seconde continue in $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta$ e derivate prime nulle in $\mathbf{x}_0$:

$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = A(\xi) + \varepsilon\rho^2 \quad (\varepsilon\to 0 \text{ per } \rho = \sqrt{\Sigma\, \xi_j^2} \to 0)$

$A(\xi) = \sum_j \sum_k a_{jk}\, \xi_j\, \xi_k$; $a_{jk} = (\partial^2 f/\partial x_j \partial x_k)_0$; $\xi_i = (x_i - x_i^0)$;

1) $A(\xi)$ definita strettamente positiva, $A(\xi)>0\ \forall\xi \Rightarrow f$ ha minimo locale in $\mathbf{x}$
2) $A(\xi)$ definita strettamente negativa, $A(\xi)<0\ \forall\xi \Rightarrow f$ ha massimo locale in $\mathbf{x}$
3) $A(\xi)$ semidefinita positiva, $A(\xi)\ge 0\ \forall\xi$, $\exists\xi' : A(\xi')=0 \Rightarrow$ incertezza
   $A(\xi)$ semidefinita negativa, $A(\xi)\le 0\ \forall\xi$, $\exists\xi' : A(\xi')=0 \Rightarrow$ incertezza
4) $A(\xi)$ è indefinita, $\exists\xi',\xi''$: $A(\xi')>0$ et $A(\xi'')<0 \Rightarrow f$ non ha estremo locale in $\mathbf{x}$

Serie di Sylvester

minori principali di $A(\xi)$: $\Delta_1 = a_{11}$; $\Delta_2 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $\Delta_3 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$

1) $\Delta_1>0, \dots, \Delta_n>0 \Rightarrow A(\xi)$ definita strettamente positiva
2) $\Delta_1<0, \dots, (-1)^n \Delta_n>0 \Rightarrow A(\xi)$ definita strettamente negativa
3) $\Delta_1\ge 0, \dots, \Delta_n\ge 0$, $\exists j : \Delta_j=0 \Rightarrow A(\xi)$ semidefinita positiva
   $\Delta_1\le 0, \dots, \Delta_n\le 0$, $\exists j : \Delta_j=0 \Rightarrow A(\xi)$ semidefinita negativa
4) negli altri casi, $A(\xi)$ è indefinita

4.8 FUNZIONI REALI ELEMENTARI

Tipo	*Formula*	*Condizioni*	*Dominio/immagine*	*Note:*
Costante	$y = C$	$C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \to \{C\}$	continua, grafico = retta ‖ asse x
Potenza ($\mathbb{Z}$)	$y = x^k$	$k \in \mathbb{Z}^+$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	continua
		$k=0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{1\}$	grafico = retta ‖ asse x
		$k \in \mathbb{Z}^-$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	
Potenza ($\mathbb{Q}$)	$y = x^{p/q}$	$p/q \in \mathbb{Q}$; q pari	$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$	continua
		$p/q \in \mathbb{Q}$; q dispari	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	continua
Polinomio	$y = P_n(x)$	$k=0,\dots,n$; $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	continua
Razionale	$y = P_m(x)/Q_n(x)$		$\{x : Q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$	continua per $Q(x) \neq 0$
Radice	$y = {}^n\sqrt{x}$ (p)			
Potenza ($\mathbb{R}$)	$y = x^a$	$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$	continua
Esponenziale	$y = a^x$	$a \in \mathbb{R}^+$; $a>1$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$	crescente
		$a=1$	$\mathbb{R} \to \{a\}$	grafico = retta ‖ asse x
		$a \in \mathbb{R}^+$; $a<1$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$	descrescente
Logaritmica	$y = \log_a x$	$a \in \mathbb{R}^+$; $a>1$	$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$	crescente
		$a \in \mathbb{R}^+$; $a<1$	$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$	descrescente
Valore assoluto	$y = \|x\|$		$\mathbb{R} \to [0,+\infty)$	continua
Trigonometriche	$y = \sin x$		$\mathbb{R} \to [-1,1]$	continua
	$y = \cos x$		$\mathbb{R} \to [-1,1]$	continua
	$y = \tan x$			
	$y = \text{cotan } x$			
	$y = \sec x$			
	$y = \text{cosec } x$			
	$y = \text{Arcsin } x$ (p)		$[-1,1] \to \mathbb{R}$	
	$y = \arcsin x$		$[-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$	str. crescente
	$y = \text{Arccos } x$ (p)			
	$y = \arccos x$		$[-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$	
	$y = \arctan x$		$\mathbb{R} \to (-\pi/2,\pi/2)$	str. crescente
Iperboliche	$y = \sinh x$			
	$y = \cosh x$			
	$y = \tanh x$			
	$y = \text{cotanh } x$			

4.9 FUNZIONI NOTEVOLI

Funzione Segno	$\text{sign } x = \begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$
Funzione Intero massimo	$[x] = n\in\mathbb{Z} : n\leq x$
Funzione Valore assoluto	$\lvert x \rvert = \begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$
Potenza (esponente reale)	$a^b\ (a>0) \qquad a^{x+y} = a^x a^y\ ;\ (xy)^a = x^a \cdot y^a$
Funzione esponenziale	$a^x\ (a>0)$ $x<y \Rightarrow a^x<a^y\ (a>1)\ ;\ a^{x+y} = a^x a^y$ $\lim a^x = 0\ (x\to-\infty)\ ;\ \lim a^x = +\infty\ (x\to+\infty)$
Funzione logaritmica	$\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$ $\lim \log_a x = -\infty\ (x\to 0^+)\ ;\ \lim \log_a x = +\infty\ (x\to+\infty)$ $a^{\log_a x} = x\ (x>0)\ ;\ \log_a a^x = x$
Funzione potenza	$x^a = e^{(a \log x)}\ (x>0)$ $(xy)^a = x^a y^a$ $\lim x^b = 0\ (x\to 0^+,\ b>0)\ ;\ \lim x^b = +\infty\ (x\to+\infty,\ b>0)$ $\lim x^b = +\infty\ (x\to 0^+, b<0)\ ;\ \lim x^b = 0\ (x\to+\infty,\ b<0)$
Funzioni trigonometriche	$\text{Arcsin } x = (-1)^k \arcsin x + k\pi$
Funzioni iperboliche	$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\tanh x = \sinh x\ /\ \text{cosh}x\ ;\ \text{cotan } x = \cosh x\ /\ \sinh x$
Funzione di Dirichlet	$f = \begin{cases} 0 & \text{nei punti razionali} \\ 1 & \text{nei punti irrazionali} \end{cases}$
FORMULE DI TAYLOR	$e^x = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^{n-1}/(n-1)! + R_n(x)$ $\quad R_n(x) = x^n/n!\ e^{\vartheta x}$ (Lagrange) $\sin x = x - x^3/3! + \ldots + (-1)^{n+1} x^{2n-1}/(2n-1)! + R_{2n+1}(x)$ $\quad R_{2n+1}(x) = x^{2n+1}/(2n+1)!\ \sin(\vartheta x+(2n+1)\pi/2)$ (Lagrange) $\cos x = 1 - x^2/2! + \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}/(2n-2)! + R_{2n}(x)$ $\quad R_{2n}(x) = x^{2n}/(2n)!\ \cos(\vartheta x+2n\pi/2)$ (Lagrange) $(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)x^2/2! + \ldots + m(m-1)\ldots(m-n-2)x^{n-1}/(n-1)! + R_n(x)$ $\quad R_n(x) = C^n{}_m\ x^n\ (1+\vartheta n)^{m-n}$ (Lagrange) $\quad R_n(x) = C^n{}_m\ x^n\ (1+\vartheta x)^{m-1}\ ((1-\vartheta)/(1+\vartheta x))^{n-1}$ (Cauchy) $\log(1+x) = x - x^2/2 + \ldots + (-1)^n x^{n-1}/(n-1)! + R_n(x)$ $\quad R_n(x) = (-1)^{n+1} x^n/(n(1+\vartheta n)^n$ (Lagrange) $\quad R_n(x) = (-1)^{n+1} (x^n/(1+\vartheta x))\ ((1-\vartheta)/(1+\vartheta x))^{n-1}$ (Cauchy)