9. GEOMETRIA

9.1 I SISTEMI DI COORDINATE

COORDINATE CARTESIANE NEL PIANO

Coordinate di un punto — $A = (x,y)$
x = ascissa di A, y = ordinata di A

COORDINATE POLARI NEL PIANO

Sistema di riferimento — punto 0 (polo), semiretta da O (asse polare)

Coordinate di un punto — $A = (\rho,\vartheta)$
ρ = distanza OA, ϑ = angolo antiorario tra la semiretta e OA (in radianti)

COORDINATE CARTESIANE NELLO SPAZIO

Coordinate di un punto — $A = (x,y,z)$
x = ascissa di A, y = ordinata di A, z = quota di A

TRASFORMAZIONI DI COORDINATE NELLO SPAZIO

Cambio coordinate — trasformazioni delle coordinate rettangolari (x,y,z) in (x',y',z'):

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{cases}$$

9.2 LE CURVE PIANE

Curva regolare — $\mathbf{x}(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ regolare in $[a,b]$, $t \in [a,b] \Leftrightarrow \varphi(t), \psi(t)$ continue e con derivate non nulle contemporaneamente in $[a,b] \Leftrightarrow |\mathbf{x}'(t)|^2 = \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 > 0$

Teorema — $\mathbf{x}(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ regolare, $\varphi'(t_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\ (t_0-\delta, t_0+\delta)$ in cui $\exists\ t = \varphi^{-1}(x) \Rightarrow$
$y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, da cui segue:
1) $y=f(x)$ è data parametricamente da $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$
2) $dy/dx = (dy/dt) / (dx/dt)$ derivata di $f(x)$ in forma parametrica

vale: $d^2y/dx^2 = (x_t' y_t'' - y_t' x_t'')/(x_t')^3$

Curva chiusa — una curva chiusa non autointersecantesi divide il piano in due domini non vuoti e non intersecantesi (uno interno e limitato, uno esterno e illimitato)

Varietà derivabile unidimens. — curva regolare tale che ogni suo punto è ricopribile da un rettangolo con spigoli paralleli agli assi in modo che la curva interna al rettangolo si proietta biunivocamente su un asse
Se Γ regolare non si autointerseca, Γ privata degli estremi è varietà derivabile unidimensionale

Tangente a una curva — $\tan\alpha = \Delta y/\Delta x = (f(x+\Delta x) - f(x)) / \Delta x$ (α = angolo tra la tangente e l'asse x)
Secante ad una curva — $\tan\beta = \lim \tan b\ (\Delta x \to 0) = f'(x)$ (β = angolo tra la secante e l'asse x)

Tangente alla curva in t_0 — $(x-x_0)/x_0' = (y-y_0)/y_0'$

Angoli tangente/assi — $\cos\alpha = (dx/ds)_0 = x_0' / \sqrt{(x_0')^2+(y_0')^2}$

$\sin\alpha = (dy/ds)_0 = y_0' / \sqrt{(X_0')^2+(y_0')^2}$

Normale alla curva in t_0 — $\cos\lambda = -\sin\alpha = -(dy/ds)_0$

(Angoli normale/assi) — $\cos\mu = \cos\alpha = (dx/ds)_0$

$(0,0,1) \times (\cos\alpha, \sin\alpha, 0) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$

Evoluta — luogo geometrico dei centri di curvatura O di una curva piana

la curva è detta EVOLVENTE

equazione: $\xi = x + (dy/ds)\,R$; $\eta = y - (dx/ds)\,R$

equazione parametrica: $\xi = x - y'\,(x'^2+y'^2)/(x'y''-y'x'')$

$\eta = y + x'\,(x'^2+y'^2)/(x'y''-y'x'')$

equazione vettoriale: $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \mathbf{v}\,R = \mathbf{r} + \mathbf{r}''(s)\,R^2$

la normale all'evolvente è tangente all'evoluta

Curvatura — in coordinate: $k = 1/R = |\,\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| \,/\, |\,\mathbf{r}'(t)|^3 = |\,x'y'' - y'x''\,| / (\,x'^2+y'^2\,)^{3/2}$

Γ: $y=f(x) \Rightarrow k = |d^2y/dx^2| \,/\, [\,1+(dy/dx)^2\,]^{3/2}$

Centro di curvatura — O giace sulla normale a Γ in A alla distanza R (verso la concavità di Γ)

Punti singolari di una curva — data la funzione Γ:$F(x,y)$; $F(x,y)=0$ in $(0,0)$; $(\partial f/\partial x)_0 = (\partial f/\partial y)_0 = 0$,

ponendo: $A = (\partial^2 f/\partial x^2)_0$; $B = (\partial^2 f/\partial x\partial y)_0$; $C = (\partial^2 f/\partial y^2)_0$

1) $AC-B^2>0 \Rightarrow$ (0,0) estremo locale di F $\Rightarrow$ (0,0) punto isolato di Γ

2) $AC-B^2<0 \Rightarrow$ vale $F(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2+\mu(x,y)$ dove $\mu(x,y)=o(\rho^3)$

ponendo: $\xi=\alpha_1 x+\beta_1 y$; $\eta=\alpha_2 x+\beta_2 y$ si ha:

$F(x,y) = \xi\eta+\Sigma\, \xi^i \eta^{3-i}\, \psi_i(\xi,\eta) = 0 \quad (i=0,1,2,3)$

sostituendo $\eta= \xi u$ ($|u|\le 1$), si ha: $\lambda(\xi,u)=u+\xi\,\varphi(\xi,u)=0$

perciò la funzione $\eta= \xi\,\mu(\xi)$ descrive un tratto di curva

sostituendo $\xi= \eta u$ ($|u|\le 1$), si ha l'altro tratto di curva

2) $AC-B^2=0 \Rightarrow$ vale $F(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2+(\alpha x+\beta y)^2$

ponendo: $\xi=\beta x-\alpha y$; $\eta=\alpha x+\beta y$ si ha:

$F(x,y) = \eta^2+\boldsymbol{\Sigma}\, \xi^i \eta^{3-i}\, \psi_i(\xi,\eta) = 0 \quad (i=0,1,2,3)$

sostituendo $\eta= \xi u$ ($|u|\le 1$), si ha: $\lambda(\xi,u)=u^2+\xi\,\varphi(\xi,u)=0$

perciò: $\eta= \pm\,\xi\,\sqrt{-\xi}\,[(\varphi)_0+\varepsilon] \simeq \xi^{3/2}\,\sqrt{-(\varphi)_0}$ dà due tratti regolari della curva, con $(\varphi)_0 = (\partial\lambda/\partial\xi)_0$

(0,0) è detto punto di ritorno di Γ

sostituendo $\xi= \eta u$ ($|u|\le 1$), non si hanno soluzioni

9.3 LE CURVE NELLO SPAZIO

Curva continua — $\mathbf{r}(t) = (\,\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\,) \qquad t\in(a,b)$

Curva regolare — $\mathbf{r}(t)$ regolare se $|\mathbf{r}'(t)|^2 = \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2 > 0$

Lunghezza di un arco — $s = F(t)$

vale $F'(t) = ds/dt = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} > 0$

equazioni parametriche: $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $z = \chi(t)$

$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

TANGENTE

Tangente alla curva in t_0 — $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x_0,y_0,z_0)$; $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'(t_0) = (x_0',y_0',z_0')$

equazione vettoriale: $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_0 + u\,\mathbf{r}'_0$

equazione cartesiana: $(x-x_0)/x_0' = (y-y_0)/y_0' = (z-z_0)/z_0'$

Angoli tangente/assi	$\cos\alpha = (dx/ds)_0$; $\cos\beta = (dy/ds)_0$; $\cos\gamma = (dz/ds)_0$
Coseni direttori della tangente	$dx/ds = \varphi'(s)$, $dy/ds = \psi'(s)$, $dz/ds = \chi'(s)$
Derivata di f lungo Γ	$df/ds = (\partial f/\partial x)\,\varphi'(s) + (\partial f/\partial y)\,\psi'(s) + (\partial f/\partial z)\,\chi'(s) = (d/ds)\, f(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))$ (è la derivata lungo la direzione del vettore tangente)

CURVATURA

Curvatura	$k = 1/R = \lvert \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\rvert \;/\; \lvert \mathbf{r}'(t)\rvert^3 =$ $= \sqrt{}\,(x'z''-z'x'')^2 + (z'x''-x'z'')^2 + (x'y''-y'x'')^2 \;/\; (\,x'^2+y'^2+z'^2\,)^{3/2}$ se $t=s$ (lunghezza di Γ): $\lvert \mathbf{r}'(s)\rvert = 1$; $k = \lvert \mathbf{r}''(s)\rvert$
Centro di curvatura	O definito da $\rho = \mathbf{r} + R\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r} + \mathbf{r}''(s)/\lvert\mathbf{r}''(s)\rvert^2$
Piano osculatore	$s: (\,\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0\,)\,(\,\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0) = 0$ coordinate cartesiane: $S: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0$

TRIEDRO MOBILE

Triedro mobile	dato $A\in\Gamma$, s=lunghezza di Γ, si definiscono i tre vettori: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}'(s)/\lvert\mathbf{r}'(s)\rvert = \mathbf{r}'(s)$ (vettore unitario della tangente) $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}''(s)/\lvert\mathbf{r}''(s)\rvert = R\,(d\boldsymbol{\alpha}/ds)$ (vettore unitario della normale) $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ (vettore unitario della binormale) i vettori $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ applicati al punto mobile A definiscono in triedro mobile
Torsione	$1/T = (d\boldsymbol{\gamma}/ds)\,\boldsymbol{\beta}$
Formule di Frenet	$d\boldsymbol{\alpha}/ds = \boldsymbol{\beta}/R$ $d\boldsymbol{\beta}/ds = -\,\boldsymbol{\alpha}/R - \boldsymbol{\gamma}/T$ $d\boldsymbol{\gamma}/ds = \boldsymbol{\beta}/T$

9.4 LE SUPERFICI

Superficie	$S: z = f(x,y)$
Piano tangente in un punto	$(\partial f/\partial x)_0\,(x-x_0) + (\partial f/\partial y)_0\,(y-y_0) + (\partial f/\partial z)_0\,(z-z_0) = 0$ è il piano passante per $P_0 \perp \operatorname{grad} f$
Piano tangente a superficie	$z-z_0 = (\partial f/\partial x)_0\,(x-x_0) + (\partial f/\partial y)_0\,(y-y_0)$ (piano tangente a S in P_0)

SUPERFICIE CHE SI PROIETTA SU $z=0$

Superficie regolare	$S: z=f(x,y)$ regolare $\Leftrightarrow$ f con derivate prime parziali continue su G (insieme aperto del piano (x,y)) $\Rightarrow \exists$ corrispondenza biunivoca tra S e G
Tratto regolare	S': $f(x,y)$ con $(x,y)\in G'$ (prolungamento di G alla frontiera γ con derivate $(\partial f/\partial x)$ e $(\partial f/\partial x)$ uniformemente continue in G)
Estremo della superficie	Γ: $S'-S$ (la cui proiezione su $z=0$ è l'insieme γ) γ regolare a tratti $\Rightarrow$ Γ regolare a tratti $\Rightarrow$ S' tratto regolare elementare

SUPERFICI REGOLARI E ORIENTABILI

Superficie regolare

S regolare $\Leftrightarrow \forall(x_0,y_0,z_0)\ \exists$ il rettangolo $\Delta = \{|x-x_0|\le\delta_1, |y-y_0|\le\delta_2, |z-z_0|\le\delta_3\}$ che taglia in S il tratto elementare regolare σ descritto da almeno una delle equazioni:

$$\begin{cases} z=f_1(x,y) & \{|x-x_0|\le\delta_1, |y-y_0|\le\delta_2\} \\ x=f_2(x,y) & \{|y-y_0|\le\delta_2, |z-z_0|\le\delta_3\} \\ y=f_3(x,y) & \{|x-x_0|\le\delta_1, |z-z_0|\le\delta_3\} \end{cases}$$

S: $F(x,y,z)=0$ è regolare $\Leftrightarrow (\partial F/\partial x)^2 + (\partial F/\partial y)^2 + (\partial F/\partial z)^2 > 0$

Estremo della superficie

Γ: S'–S; S regolare non ha estremo $\Rightarrow$ S insieme chiuso

Tratto regolare di superficie

parte di S chiusura della superficie regolare connessa con estremo regolare a tratti

Superficie regolare a tratti

S tagliabile in un numero finito di tratti regolari elementari

Piano tangente in un punto

Il piano tangente alla superficie S in (x_0,y_0,z_0) è:

$(\partial f/\partial x)_0\,(x-x_0) + (\partial f/\partial y)_0\,(y-y_0) + (\partial f/\partial z)_0\,(z-z_0) = 0$

$z-z_0 = (\partial\psi/\partial x)_0\,(x-x_0) + (\partial\psi/\partial y)_0\,(y-y_0)$ con σ: $\psi(x,y)$ tratto element. reg.

Superficie parametrica regolare

Superficie data in modo regolare dai parametri (u,v):

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$$

è regolare se si verifica: $(D(x,y)/D(u,v))^2 + (D(y,z)/D(u,v))^2 + (D(z,x)/D(u,v))^2 > 0$

cioè $\mathbf{r} = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{i} + \chi\mathbf{i}$ regolare se $|\,\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\,| > 0$

Parametri ammissibili

dati $u = \lambda(u',v')$ e $v = \mu(u',v')$ dove λ,μ sono funzioni derivabili con continuità il cui jacobiano è $D(u',v')/D(u,v) \neq 0$, si ha:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u',v') = \varphi(\lambda(u',v'),\mu(u',v')) \\ y = \psi_1(u',v') = \psi(\lambda(u',v'),\mu(u',v')) \\ z = \chi_1(u',v') = \chi(\lambda(u',v'),\mu(u',v')) \end{cases}$$

dove $\varphi_1\ \psi_1\ \chi_1$ sono funzioni derivabili con continuità e $|\,\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\,|^2 > 0$

Normale

$\mathbf{n} = \pm\,(\,\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\,) \,/\, |\,\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\,|$ coppia di normali unitarie dipendenti con continuità da (u,v)

Superficie orientata

S tale che da ogni suo punto A si può tracciare la normale **n** tale che la funzione ottenuta sia continua in tutta S

una superficie può essere orientata nei due versi opposti S_+, S_-

S regolare definita $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$ è orientabile

una superficie non orientabile non può essere data parametricamente da un sistema del tipo $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$ (es. nastro di Möbius)

ogni superficie regolare è localmente orientabile

SEZIONI NORMALE E PIANA DI SUPERFICI

Normali

dati la superficie $z= f(x,y)$ doppiamente derivabile con continuità, la curva Γ: $\mathbf{r}(s) = \varphi(s)\mathbf{i} + \psi(s)\mathbf{j} + \chi(s)\mathbf{k}$ doppiamente derivabile di curavtura R, ponendo: $p=\partial z/\partial y$; $q=\partial z/\partial y$; $r=\partial^2 z/\partial x^2$; $s=\partial^2 f/\partial x\partial y$; $t=\partial^2 f/\partial y^2$ nel punto A=(x,y,z) si ha:

$\mathbf{n} = (-p/\sqrt{1+p^2+q^2})\,\mathbf{i} + (-q/\sqrt{1+p^2+q^2})\,\mathbf{j} + (1/\sqrt{1+p^2+q^2})\,\mathbf{k}$

(normale unitaria a S in A)

$\mathbf{v} = R\,[\,(\partial^2 x/\partial s^2)\,\mathbf{i} + (\partial^2 y/\partial s^2)\,\mathbf{j} + (\partial^2 z/\partial s^2)\,\mathbf{k}]$

(vettore unitario della normale principale a Γ in A)

Curvatura	se ϑ= angolo $\mathbf{n}$^$\mathbf{v}$, α=dx/ds, β=dy/ds (angoli formati dalla tangente a Γ con gli assi x y, si ha:
	$\cos\vartheta / R = (r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2) / \sqrt{1+p^2+q^2}$
	(cioè tutte le curve Γ aventi in A lo stesso piano osculatore distinto dal piano tangente a S in A, hanno in A la stessa curvatura)
Forma parametrica	data S: = $\varphi(u,v)\mathbf{i} + \psi(u,v)\mathbf{j} + \chi(u,v)\mathbf{k}$, vale:
	$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ (definita str. positiva se S è regolare)
	dove: $E = (\partial x/\partial u)^2 + (\partial y/\partial u)^2 + (\partial z/\partial u)^2$
	$F = (\partial x/\partial u)(\partial x/\partial v) + (\partial y/\partial u)(\partial y/\partial v) + (\partial z/\partial u)(\partial z/\partial v)$
	$G = (\partial x/\partial v)^2 + (\partial y/\partial v)^2 + (\partial z/\partial v)^2$
	sostituendo $u=\lambda(t)$, $v=\mu(t)$, si ha la curva Γ regolare su S e vale:
	$\cos\vartheta / R = (\,\mathbf{r}''_{uu}\,du^2 + \mathbf{r}''_{uv}\,du\,dv + \mathbf{r}''_{vv}\,dv^2\,)\,(\,\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\,) / (\,ds^2\,\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|)$
Sezione normale	intersezione di S con il piano per la normale a S in A
Sezione piana	intersezione di S con il piano per la tangente di Γ in A
Formula di Meusnier	$\pm 1/R = \cos\vartheta / R'$ dove: R = raggio di curvatura della sezione normale Γ
	R' = raggio di curvatura della sezione piana Γ'
Raggio curv. della sez. normale	$\pm 1/R = (r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2) / \sqrt{1+p^2+q^2}$
	se A=(0,0,0) e l'asse z è normale a S, si ha:
	$\pm 1/R = (r\cos^2\vartheta + 2s\cos\vartheta\sin\vartheta + t\sin^2\vartheta)$
	il massimo e il minimo si hanno per $\tan 2\vartheta = 2s/(r-t)$
	la curvatura della sezione normale ha massimo $1/R_1$
	la curvatura della sezione normale ha minimo $1/R_2$
Raggi di curvatura principali	R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura principali della superficie (hanno la direzione degli assi coordinati x y)
Formula di Eulero	$1/R = \cos^2\vartheta / R_1 + \sin^2\vartheta / R_2$
Curvatura media	è la somma costante $(1/R_1+1/R_2)$ della curvatura di 2 sezioni perpendicolari

CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI DI UNA SUPERFICIE DOPPIAMENTE DERIVABILE

Classificazione dei punti	se R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura principali, si ha:
	1) punto ellittico — se $R_1R_2 > 0 \Rightarrow$ tutte le sezioni normali hanno concavità verso l'asse z pos. o neg.
	2) punto iperbolico — se $R_1R_2 < 0 \Rightarrow$ esistono almeno 2 sezioni di curvatura nulla
	3) punto parabolico — se $1/R_1R_2 = 0 \Rightarrow$ esiste una sola sezione di curvatura nulla, le altre hanno concavità in un'unica direzione
	se r=t, un punto di z= f(x,y), con piano tangente non necessariamente parallelo agli assi x e y, è un:
	1) punto ellittico — se $r^2-s^2 > 0$ (se s=0 si ha 1/R=raggio costante)
	2) punto iperbolico — se $r^2-s^2 < 0$
	3) punto parabolico — se $r^2-s^2 = 0$

9.5 CURVE NOTEVOLI

CIRCONFERENZA

Coordinate cartesiane $x^2 + y^2 = r^2$ centro = (0,0) ; raggio = r

Coordinate polari $\rho = 2 \cos \vartheta$ $(-\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2)$ centro = (1,0) ; raggio = 1

Equazione $x^2 + y^2 = 1$

Equazioni parametriche $x = \cos \vartheta$, $y = \sin \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$

è una curva chiusa non autointersecantesi

ϑ = angolo formato dal raggio vettore di (x,y) con la direz. pos. dell'asse x

Angolo (radianti) $\alpha = L/R$

Raggio curvatura $\rho = 1/R = \alpha/L$

CURVA DI PEANO $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [0,1]$, (x,y) descrive tutti i punti del quadrato $0 \le x,y \le 1$

ELLISSE

Equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(a,b>0)$

Equazioni parametriche $x = a \cos \vartheta$, $y = b \sin \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$

è una curva chiusa non autointersecantesi, regolare e limitata

SPIRALE DI ARCHIMEDE $\rho = a^{\vartheta}$ $(a>0)$ $(-\infty < \vartheta <, \ldots \infty)$

ASTROIDE $|ax|^{2/3} + |by|^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ $(a>b>0)$

Equazioni parametriche $x = [(a^2-b^2)/a] \cos^3 \vartheta$, $y = [(a^2-b^2)/a] \sin^3 \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$

è una curva chiusa, regolare a tratti, continua e limitata

CICLOIDE è l'evoluta dell'ellisse

9.6 SUPERFICI NOTEVOLI

SUPERFICIE SFERICA

Eq. cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

raggio R, centro (0,0,0)

è una superficie regolare

Piano tangente in (x_0,y_0,z_0) $x_0 (x-x_0) + y_0 (y-y_0) + z_0 (z-z_0) = 0$

Eq. parametrica:
$$\begin{cases} x = R \cos \vartheta \cos \varphi \\ y = R \cos \vartheta \sin \varphi \\ z = R \sin \vartheta \end{cases}$$

CONO CIRCOLARE

Eq. cartesiana $x^2 - y^2 - z^2 = 0$

vertice (0,0,0), asse parallelo all'asse x

privo del vertice (dove non ha piano tangente) è una superficie regolare

TORO

Definizione è la superficie rotazione attorno all'asse y di una circonferenza del piano (x,y)

Eq. cartesiana $T: \left(\sqrt{x^2+z^2} - b \right)^2 + y^2 - a^2 = 0$

è una superficie regolare

Eq. parametrica
$$T: \begin{cases} x = (b + a \cos \vartheta) \cos \varphi \\ y = a \sin \vartheta \\ z = (b + a \cos \vartheta) \sin \varphi \end{cases}$$

ϑ = angolo formato dal raggio della circ.

φ = angolo di rotazione intorno all'asse y