1. INSIEMISTICA

1.1 GLI INSIEMI

Elemento di un insieme	$x \in A$
Sottoinsieme	$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$; $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B$
Insieme vuoto	$\varnothing \subset A,\ \forall A$
Coppia ordinata	(x,y) ; $(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$

OPERAZIONI

Somma o unione	$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ aut } x \in B \}$ $\quad \cup A_k = A_1 \cup \ldots \cup A_N$
Differenza	$A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ et } x \notin B \}$
Intersezione	$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ et } x \in B \}$
Proprietà	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $\quad C \cap (\cup A_k) = \cup (C \cap A_k)$

INSIEMI LIMITATI E ILLIMITATI

Insiemi limitati	E limitato $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \exists M : \lvert x \rvert < M$
	E maggiorato $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \exists M : x \leq M$
	E minorato $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \exists m : x \geq m$
Insiemi illimitati	E illimitato $\Leftrightarrow \forall M,\ \exists x_0 \in E : \lvert x_0 \rvert > M$
Estremo superiore	$M = \sup A \Leftrightarrow \{ \forall x \in A,\ x \leq M ;\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A : x_0 > M - \varepsilon \}$
	A illimitato superiormente $\Rightarrow \sup A = +\infty$
Estremo inferiore	$m = \inf A \Leftrightarrow \{ \forall x \in A,\ x \geq m ;\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A : x_0 < M + \varepsilon \}$
	A illimitato inferiormente $\Rightarrow \inf A = -\infty$
	$x \in A \quad \inf x = -\sup(-x)$

INTERVALLI E INTORNI

Intervallo chiuso	$[a,b] = \{ x : a \leq x \leq b \}$
Intervallo aperto	$(a,b) = \{ x : a < x < b \}$
Intervalli semiaperti	$[a,b) = \{ x : a \leq x < b \}$; $(a,b] = \{ x : a < x \leq b \}$
Intervalli infiniti	$(-\infty,a] = \{ x : x \leq a \}$; $[a,+\infty) = \{ x : x \geq a \}$
	$(-\infty,a) = \{ x : x < a \}$; $(a,+\infty) = \{ x : x > a \}$
Intorno di un punto a	$U(a) = (c,d) : c < a < d \quad U_1(a) \cap U_2(a) = U(a)$
Intorno di ∞	$\{ x : \lvert x \rvert > M \}$
Intorno di sinistra	$(c,a] \qquad (M,+\infty)$ = intorno sinistro di ∞ = intorno di $+\infty$
Intorno di destra	$[a,d) \qquad (-\infty,M)$ = intorno destro di ∞ = intorno di $-\infty$

PUNTI LIMITE E NUMERABILITA'

Punto limite	a punto limite di E $\Leftrightarrow$ ogni U(a) contiene almeno un $x \in E,\ x \neq a \Leftrightarrow$ ogni U(a) contiene infiniti punti di E
Insieme derivato	E' insieme derivato di E $\Leftrightarrow$ E' contiene tutti i punti limite di E
Insieme infinito	E infinito $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, E contiene più di n elementi
Teorema di Weierstrass	E infinito illimitato $\Rightarrow$ E contiene almeno un punto limite $(E' \neq 0)$

Insieme numerabile

E numerabile $\Leftrightarrow$ E infinito, $\exists$ corrispondenza biunivoca tra gli $x \in E$ e gli $n \in \mathbb{N}$
E numerabile, $A \subset E$, $A \neq \varnothing \Rightarrow \exists$ in A un elemento di indice minimo
E numerabile, A parte infinita di E $\Rightarrow$ A numerabile
$E = \cup E^k = E^1 + E^2 + \ldots$ $(k=1,2,\ldots \infty)$, E^k numerabili $\Rightarrow$ E numerabile
$E = E^1 + E^2 + \ldots + E^n$, E^k numerabili (almeno uno) o finiti $\Rightarrow$ E numerabile
$\mathbb{N}$ è numerabile, $\mathbb{Q}$ è numerabile, $\mathbb{R}$ non è numerabile

1.2 GLI INSIEME LINEARI

Insieme lineare

E in cui sono definite le operazioni:
Somma $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in E$
Prodotto $\alpha\mathbf{x} \in E$ $(\alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow$ E reale lineare, $\alpha\in\mathbb{C} \Rightarrow$ E complesso lineare)

e valgono le proprietà:
1. $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$
2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$
3. $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{x}+\mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y}=\mathbf{z}$
4. $\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})$
5. $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x} = (\alpha+\beta)\mathbf{x}$
6. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
7. $1\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$

sono lineari: $\mathbb{R}_n$, $\mathbb{C}_n$, {successioni}, {funzioni continue}, $\{P_n(x)\}$

SPAZIO LINEARE CON PRODOTTO SCALARE

Spazio lin. con prodotto scal.

E lineare in cui è definita l'operazione *Prodotto scalare* $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, tale che:
1. $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$
2. $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ è una forma lineare: $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z}) = \alpha\,(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \beta\,(\mathbf{y},\mathbf{z})$
   $(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z}) = \alpha\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \beta\,(\mathbf{x},\mathbf{z})$
3. $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$; $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0 \Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}$

Disuguaglianze:

1) $|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq (\mathbf{x},\mathbf{x})^{½}\,(\mathbf{y},\mathbf{y})^{½}$ (Bunjakovskij)
2) $|(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})| \leq (\mathbf{x},\mathbf{x})^{½}\,(\mathbf{y},\mathbf{y})^{½}$

SPAZIO NORMALIZZATO LINEARE

Norma

$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x},\mathbf{x})^{½}$

Spazio normalizzato lineare

E lineare in cui $\forall\mathbf{x}\in E$, $\exists\ \|\mathbf{x}\|$:
1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$; $\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x}$ elemento nullo di E
2. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\ \|\mathbf{x}\|$
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ (disuguaglianza del triangolo)

LIMITE

Convergenza

$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}\| \to 0$

Proprietà

$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, $\alpha_n \to \alpha \Rightarrow \lim\,(\mathbf{x}_n+\mathbf{x}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\lim\,(\alpha_n\,\mathbf{x}_n) = \alpha\,\mathbf{x}$

1.3 GLI INSIEMI IN UNO SPAZIO n-DIMENSIONALE

Punto

$\mathbf{x} = (\,x_1, \ldots, x_n\,) \in \mathbb{R}^n$

Sfera

$\{\,\mathbf{x} : |\,\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| \leq r\,\}$ = Sfera chiusa di raggio r e centro $\mathbf{x}^0$
$\{\,\mathbf{x} : |\,\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| < r\,\}$ = Sfera aperta di raggio r e centro $\mathbf{x}^0$

Rettangolo

$\{\,\mathbf{x} : a_i \leq x_i \leq b_i\,\}$ = Rettangolo chiuso di raggio r e centro $\mathbf{x}^0$
$\{\,\mathbf{x} : a_i < x_i < b_i\,\}$ = Rettangolo aperto di raggio r e centro $\mathbf{x}^0$

Cubo	$\{ \mathbf{x} : \| x_i - x^0_i \| \leq a \}$ = Cubo chiuso di centro $\mathbf{x}^0$ e lato 2a
	$\{ \mathbf{x} : \| x_i - x^0_i \| < a \}$ = Cubo aperto di centro $\mathbf{x}^0$ e lato 2a
Disuguaglianze	$\| x_i - x^0_i \| \leq \| \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \| < r$
	(ovvero un cubo di lato 2r e centro $\mathbf{x}^0$ contiene una sfera di raggio r e centro $\mathbf{x}^0$)
	$\| x_i - x^0_i \| < a \Rightarrow \| \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \| < a \sqrt{n}$
	(ovvero una sfera di raggio $a\sqrt{n}$ e centro $\mathbf{x}^0$ contiene un cubo di lato 2a e centro $\mathbf{x}^0$)
Punto interno	$\mathbf{x}^0$ punto interno $\Leftrightarrow \exists$ una sfera (o un cubo) di centro $\mathbf{x}^0$ che appartiene tutta ad $E \in \mathbb{R}^n$
Insieme aperto	E aperto se ($\mathbf{x} \in E \Rightarrow \mathbf{x}$ punto interno di E)
	E_1 E_2 aperti $\Rightarrow E_1 \cap E_2$ $E_1 \cup E_2$ aperti
Intorno di un punto	$I(\mathbf{x}^0)$ = insieme aperto qualsiasi contenente $\mathbf{x}^0$
Punto interno	$\mathbf{x}^0$ punto interno di E $\Leftrightarrow \exists\ I(\mathbf{x}^0) \in E$
Insieme connesso	E connesso $\Leftrightarrow$ x',x"$\in$E sono congiunti con una curva $\Gamma \in E$
Segmento	dati i punti x' e x", curva $x(t) = tx' + (1-t)x"$ $\quad t \in [0,1]$
Insieme convesso	E convesso $\Leftrightarrow$ E contiene x', x" e il segmento che li congiunge
Distanza punto-insieme	$r(\mathbf{x}^0, E) = \inf \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \inf \sqrt{\Sigma\, (x_j - x_j^0)^2}$ $\quad (\mathbf{x} \in E)$
Distanza tra due insiemi	$r(E_1, E_2) = \inf \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}"\|$ $\quad (\mathbf{x}', \mathbf{x}" \in E)$

PUNTI LIMITE E ISOLATI

Punto limite	$\mathbf{x}^0$ punto limite di E $\Leftrightarrow$ ogni intorno di $\mathbf{x}^0$ contiene almeno un $\mathbf{x} \in A$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0)$
Punto isolato	$\mathbf{x}^0$ punto isolato di E $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}^0$ non è punto limite per E
Insieme derivato	E' = insieme di tutti i punti limite di E
Insieme limitato	E limitato se è contenuto in una sfera (o cubo)
Teorema di Weierstrass	Ogni insieme infinito e limitato ha almeno un punto limite
Insieme chiuso	E chiuso $\Leftrightarrow$ tutti i punti limite di E gli appartengono
	(se E non ha punti limite è chiuso)
Chiusura di un insieme	chiusura di E = insieme formato da E e dai suoi punti limite
	la chiusura di un insieme è un insieme chiuso
	E chiuso $\Leftrightarrow (R_n - E)$ aperto; E aperto $\Leftrightarrow (R_n - E)$ chiuso
	$\emptyset$ e R_n sono contemporaneamente chiusi e aperti
Lemma (rettangoli inclusi)	data la successione di rettangoli inclusi Δ_k di diametro $d_k \to 0 \Rightarrow \exists \mathbf{x}_0$ che appartiene a tutti i Δ_k
Lemma di Borel	un sistema infinito di insiemi aperti copre E limitato e chiuso $\Rightarrow$ nel sistema esiste un numero finito di quegli insiemi che copre E

PUNTI DI FRONTIERA, INTERNI ED ESTERNI

Punto di frontiera	$\mathbf{x}^0$ punto di frontiera di E $\Leftrightarrow$ ogni intorno di $\mathbf{x}^0$ contiene $\mathbf{x} \in E$ e $\mathbf{x}' \notin E$
Punto interno	$\mathbf{x}^0$ punto interno di E $\Leftrightarrow \exists$ un intorno di $\mathbf{x}^0 \subset A$
Punto esterno	$\mathbf{x}^0$ punto esterno di E $\Leftrightarrow \mathbf{x}^0 \notin E$, $\exists$ un intorno di $\mathbf{x}^0 \not\subset A$
Frontiera	frontiera di E = { punti di frontiera di E } (insieme chiuso)
Nucleo aperto	nucleo aperto di E = { punti interni di E } (insieme aperto)
Esteriore	esteriore di E = { punti esterni di E } (insieme aperto)