7. INTEGRAZIONE

7.1 L'INTEGRALE INDEFINITO

Funzione primitiva

$\mathcal{F}(x)$ primitiva di f in (a,b) se $\mathcal{F}'(x) = f(x)$

Integrale indefinito

$\int f(x)dx = \mathcal{F}(x)+C$ ($\mathcal{F}(x)$ primitiva di $f(x)$, $f(x)$ continua in (a,b))

$f(x)$ continua in (a,b) ha la primitiva $F(x)$ continua in (a,b)

Proprietà lineare

$\int (Au(x) + Bv(x))\, dx = A \int u(x)\, dx + B \int v(x)\, dx$

$\int (\Sigma A_j f_j(x))dx = \Sigma A_j \int f_j(x)dx + C$

METODI DI INTEGRAZIONE

Sostituzione

data $f(x)$ continua, $\varphi(t)$ derivabile con continuità

$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, d\varphi(t) + C$

Integrazione per parti

date $u(x)$ e $v(x)$ derivabili con continuità

$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx + C$

INTEGRAZIONE DELLE FRAZIONI RAZIONALI

Integr. frazione razionale

$\int P(x)/Q(x)\, dx$

se grado(P)$\geq$grado(Q), si trova $P/Q = R + P_1/Q$

(P_1/Q è sviluppabile in frazioni elementari integrabili)

Metodo di Ostrograskij

$\int P(x)/Q(x)\, dx$ (P/Q frazione reale regolare, n=grado(Q), λ_j = radice di Q di molteplicità k_j)

$\int P(x)/Q(x)\, dx = M(x)/L(x) + \int N(x)/Q(x)\, dx$

$K(x) = (x-\lambda_1) \dots (x-\lambda_m)$

$L(x) = (x-\lambda_1)^{k(1)-1} \dots (x-\lambda_m)^{k(m)-1}$

se non si conoscono le radici λ_j:

1) si trova $L(x)$ con l'algoritmo di Euclide
2) si trova $K(x) = P(x)/L(x)$
3) si pone: $M(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-m-1} x^{n-m-1}$
   $N(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{m-1} x^{m-1}$
4) si deriva: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \frac{a_0 + \dots + a_{n-m-1} x^{n-m-1}}{L(x)} + \int \frac{b_0 + \dots + b_{m-1} x^{m-1}}{Q(x)}\, dx$
5) si trovano i coefficienti a_j e b_j e di determinano $M(x)$ e $N(x)$
6) conoscendo le radici di $K(x)$ o approssimando, si integra $\int N(x)/Q(x)\, dx$

INTEGRAZIONE DI ESPRESSIONI ALGEBRICHE IRRAZIONALI

Integr. espr. alg. irrazionali

$\int R(x, [(ax+b)/(cx+d)]^{\lambda}, \dots, [(ax+b)/(cx+d)]^{\mu})\, dx$ ($\lambda,\dots,\mu$ numeri razionali il cui denominatore comune è m)

con la sostituzione $t^m = (ax+b)/(cx+d) \Rightarrow x = \mu(t)$, $dx = \mu'(t)\, dt$, si trasforma in: $\int R(\mu(t), \dots t^p, \dots, t^q)\, \mu'(t)\, dt$ (integrale di funzione razionale)

($p,\dots, q$ = numeratori interi delle frazioni $\lambda,\dots,\mu$ ridotte al denominatore m)

Sostituzione di Eulero

$\int R(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx \qquad (c \neq 0)$

1) se le radici α,β di $a+bx+cx^2$ sono reali e distinte, con la sostituzione $t = \sqrt{a+bx+cx^2} / (x-\alpha) = \sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)} / (x-\alpha) \Rightarrow t^2 = c(x-\beta)/(x-\alpha) \Rightarrow$ $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$, si trasforma in: $\int R(\varphi(t), t(\varphi(t)-\alpha))\,\varphi'(t)\,dt$
2) se le radici α,β di $a+bx+cx^2$ sono complesse e $c>0$, con la sostituzione $t = \sqrt{a+bx+cx^2} \pm x\sqrt{c} \Rightarrow a+bx = t^2 \mp 2tx\sqrt{c} \Rightarrow x = \varphi(t) = (t^2-a)/(b\pm 2t\sqrt{c})$, $dx = \varphi'(t)\,dt$, si trasforma in: $\int R(\varphi(t), t\mp \varphi(t)\sqrt{c})\,\varphi'(t)\,dt$

Integr. differenziali binomiali

$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx \qquad (a,b \neq 0,\ m,n,p \text{ numeri razionali})$

con la sostituzione $t=x^n \Rightarrow x=t^{1/n}$, $dx = (1/n)\,t^{(1/n)-1}\,dt$, si trasforma in:

$(1/n)\int t^{m+(1/n)-1}(a+bt)^p\,dt$

ponendo $q=m+(1/n)-1$, si ha:

$$\int t^q (a+bt)^p\,dt = \begin{cases} \int R(t, t^q)\,dt & \textit{se p intero} \\ \int R(t, (a+bt)^p)\,dt & \textit{se q intero} \\ \int t^{p+q}[(a+bt)/t]^p\,dt & \textit{se (p+q) intero} \end{cases}$$

Teorema di Čebyšev

se non è soddisfatta una delle tre condizioni precedenti, $\int t^q (a+bt)^p\,dt$ non è integrabile in funzioni elementari

Sostituzioni trigonometriche

1) $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ con la sostituzione $x=a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t$, $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, si trasforma in un integrale razionale
2) $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ con la sostituzione $x=a\tan t \Rightarrow dx = a\cos^{-2} t$, $\sqrt{a^2+x^2} = a\cos^{-1} t$, si trasforma in un integrale razionale
3) $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ con la sostituzione $x=a\sec t \Rightarrow dx = a\tan t\sec t$, $\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$, si trasforma in un integrale razionale

INTEGRAZIONE DI ESPRESSIONI TRIGONOMETRICHE

integr. espr. trigonometriche

$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int [P(\cos x, \sin x)/Q(\cos x, \sin x)]\,dx$

1) se P pari e Q dispari rispetto a $\sin x$ (o viceversa), con la sostituzione $t = \cos x$, si trasforma in: $-\int [M(t,1-t^2)/N(t,1-t^2)]\,dx$
2) se P pari e Q dispari rispetto a $\cos x$ (o viceversa), con la sostituzione $t = \sin x$, si trasforma in un integrale razionale
3) se P e Q entrambi pari o dispari rispetto a $\sin x$ e $\cos x$, con la sostituzione $t = \tan x$ (o $t=\cot$an), si trasforma in un integrale razionale
4) in tutti i casi, con la sostituzione $t = \tan(x/2) \Rightarrow$
   $\cos x = [1-\tan^2(x/2)]/[1+\tan^2(x/2)] = (1-t^2)/(1+t^2)$,
   $\sin x = 2\tan^2(x/2)/[1+\tan^2(x/2)] = 2t/(1+t^2)$, $dt = ½\sec^2(x/2)\,dx =$
   $= ½(1+t^2)\,dt$, $dx = 2dt/(1+t^2)$, si trasforma in un integrale razionale
5) $\cos^m x\cos^n x$, $\cos^m x\sin^n x$, $\sin^m x\sin^n x$ (m,l interi non negativi) sono polinomi trigonometrici di grado $(m+n)$

Integr. polinomi trigonometrici

$\int T_n(x) = \int (a_o/2)\,x + \Sigma\,(a_k\cos kx + b_k\sin kx) =$
$(a_o/2)\,x + (1/k)\,\Sigma\,(a_k\sin kx + b_k\cos kx)$

INTEGRALI NON ESPRIMIBILI MEDIANTE ESPRESSIONI ELEMENTARI

integrali di funzioni notevoli

$\int e^{-x^{\wedge}2}\,dx$; $\int (\sin x/x)\,dx$

Integrali ellittici

$\int dx / \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ (1° specie) $(0<k<1)$

$\int x^2\,dx / \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ (2° specie) $(0<k<1)$

$\int dx / [(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}]$ (3° specie) $(0<k<1)$

sostituendo $x=\sin\varphi$ $(0\le\varphi\le\pi/2)$, si trasformano negli integrali ellittici:

$\int d\varphi / \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ (forma di Legendre di 1° specie)

$(1/k^2)\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ (forma di Legendre di 2° specie)

$\int d\varphi / [(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}]$ (forma di Legendre di 3° specie)

7.2 INTEGRALE DEFINITO

Somma integrale $\Sigma f(\xi_j)\,\Delta x_j$ $(j=0,1,2,\ldots,n-1)$ f continua in $[a,b]$ diviso in tratti $[x_j,x_{j+1}]$ $\xi_j \in [x_j,x_{j+1}]$

Integrale definito $\int_a^b f(x)d(x) = \lim_{\max \Delta x \to 0} \Sigma f(\xi_j)\,\Delta x_j$ $(j=0,1,2,\ldots,n-1)$

Teorema Newton-Leibnitz $\int_a^b f(x)d(x) = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ ($\mathcal{F}(x)$ primitiva di $f(x)$)

7.3 INTEGRALI INDEFINITI ELEMENTARI

$\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C$

$\int dx/x = \log|x| + C$

$\int P_n(x)\,dx = \Sigma\,(\,a_k\,x^{k+1}\,/\,k+1\,) + C$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int a^x\,dx = a^x/\log a + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\int \cos ax\,dx = (\,\sin ax\,/\,a\,) + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \sin ax\,dx = (\,-\cos ax\,/\,a\,) + C$

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

$\int \mathrm{cosec}^2\,x\,dx = -\mathrm{cotan}\,x + C$

$\int dx/\sqrt{1-x^2} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$ $(C'=C+\pi/2)$

$\int dx/(1+x^2) = \arctan x + C = \arctan[(x\pm1)/(1\pm x)] + C$

$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$

7.4 INTEGRALI INDEFINITI NOTEVOLI

Formule di sostituzione di variabile

$\int \sin ax\,dx = -(1/a)\cos ax + C$

$\int dx/(x-a)^n\,dx = 1/\,(1-n)(x-a)^{n+1} + C$

$\int dx/(x-a) = \log|x-a| + C$

$\int dx/(a^2+x^2) = (1/a)\arctan(x/a) + C$

$\int dx/(x^2-a^2) = (1/2a)\log|\,(x-a)/(x+a)\,| + C$

$$\int dx/(x^2+px+q) = \begin{cases} (1/a)\arctan[(x+p/2)/a] + C & \textit{se } p^2-4q>0 \quad (a>0,\ a^2=q-p^2/4) \\ -1/(x+p/2) + C & \textit{se } p^2-4q=0 \\ (1/2a)\log|\,(x+p/2-a)/(x+p/2+a)\,| + C & \textit{se } p^2-4q<0 \quad (a>0,\ a^2=p^2/4-q) \end{cases}$$

$\int Ax+B/(x^2+px+q)\,dx = (A/2)\log|x^2+px+q| + (B-Ap/2)\int dx/(x^2+px+q)$

$\int dx/(x^2+px+q)^n = \int du/(u^2+a^2)^n + C$ (*solo se* $p^2-4q>0$, $u=x+p/2$, $a^2=q-p^2/4$)

$\int dx/\sqrt{a^2-x^2} = \arcsin(x/a) + C$

$\int dx/(\sin x\cos x) = \log|\tan x| + C$

$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C$

$\int dx/(1+\cos x) = \tan(x/2) + C$

$\int dx/(1+\cos^2 x) = (1/\sqrt{2})\arctan[(1/\sqrt{2})\tan x] + C$

Integrazione per parti

$\int \log x \, dx = x (\log x - 1) + C$

$\int e^{ax} \cos x \, dx = e^{ax} (\sin x + a \cos x)/(1+a^2) + C$

$a^2 \int dx/(x^2+a^2)^n = x/[2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}] + \int dx/(x^2+a^2)^{n-1} \quad (n>1, a>0)$

$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$\int x \, dx/(\cos^2 x) = x \tan x - \log | \cos x | + C$

Sostituzione e integrazione per parti

$\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C$

$\int \sqrt{(1+x)/(1-x)} \, dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$

Sostituzione di Eulero

$\int dx/\sqrt{a+bx+x^2} = \log | (b/2) + x + \sqrt{a+bx+x^2} | + C$ $\quad (a+bx+x^2$ ha radici complesse)

in particolare: $\int dx/\sqrt{x^2-a} = \log | x + \sqrt{x^2+a} | + C$

$\int dx/\sqrt{a+bx-x^2} = \arcsin ((2x-b)/\sqrt{b^2+4a}) + C$

$\int dx/(x\sqrt{ax^2+bx+1}) = \mp \log | (b/2) + (1 \pm \sqrt{ax^2+bx+1})/x | + C$

$\int dx/(x\sqrt{ax^2+bx-1}) = \pm \arcsin ((bx-2)/(x\sqrt{b^2+4a})) + C$

$\int dx/\sqrt{a+bx+cx^2}$ si riconduce ai casi precedenti ponendo $z = x \sqrt{|c|}$

Sostituzione (differenziali binomiali)

$\int dx/[(1+x^2)\sqrt{1-x^2}] = (1/\sqrt{2}) \arctan (x\sqrt{2}/\sqrt{1-x^2}) + C$

$\int dx/[(1-x^2)\sqrt{1+x^2}] = (1/2\sqrt{2}) \log | (\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}) / (\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}) | + C$

Sostituzioni trigonometriche

$\int \sqrt{x^2-a^2} \, dx = (a^2/2) (\arcsin (x/a) + (x/a^2) \sqrt{a^2-x^2}) + C$

Sostituzioni (trigonometrici)

$\int dx / (\sin x \cos x) = \log | \tan x | + C$

$\int dx / \sin x = \log | \tan (x/2) | + C$

$\int dx / (a + b \cos x) = \int 2dt / [a (1+\tan^2(x/2)) + b (1-\tan^2(x/2))]$

$\int dx / (a + b \cos x + c \sin x) = \int dx / (a + r \cos (x-\varphi)$ si riconduce al precedente $(b=r \cos \varphi, c=r \sin \varphi)$

$\int dx / (a + b \cos x) = \int 2dt / [a (1+\tan^2(x/2)) + b (1-\tan^2(x/2))]$

$\int dx / (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) = (1/ab) \arctan [(b/a)\tan x] + C$