5. LIMITI E CONTINUITA'

5.1 LIMITE DI FUNZIONE DI UNA VARIABILE

Limite finito in punto finito	$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f$ def. su $U(a)\setminus\{a\}$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x : 0<\lvert x-a\rvert<d \Rightarrow \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
Limite finito in punto infinito	$f(\infty)=A \Leftrightarrow f$ def. Per $\lvert x\rvert>K>0$, $\forall\varepsilon>0\ \exists M>K>0 : \forall \lvert x\rvert>M \Rightarrow \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

Se non specificato, si intende lim f(x) per x→a (a finito o infinito)

Teoremi

1) $\lim f(x)=A$ finito $\Rightarrow \exists M : \forall x\in U(a)\setminus\{a\}, \lvert f(x)\rvert\le M$
   (in un intorno di a f è limitata)
2) $\lim f(x)=A\neq0$ finito $\Rightarrow \exists U(a) : \forall x\in U(a)\setminus\{a\}, \lvert f(x)\rvert>\lvert A\rvert/2$
   $(A>0 \Rightarrow f(x)>A/2$; $A<0 \Rightarrow f(x)<A/2)$
3) $\lim f_1(x)=A_1$ $\lim f_2(x)=A_2$, $\forall x\in U(a)\setminus\{a\}, f_1(x)\le f_2(x) \Rightarrow A_1\le A_2$
4) $\lim f_1(x)=A$, $\lim f_2(x)=A$, $\forall x\in U(a)\setminus\{a\}, f_1(x)\le\varphi(x)\le f_2(x) \Rightarrow \lim \varphi(x)=A$

Criterio di Cauchy di esistenza: $\exists \lim f(x) =A$ finito $\Leftrightarrow f$ def. su $U(a)\setminus\{a\}$, $\forall\varepsilon>0\ \exists U(a) : \forall x'\ x'' \in U(a)\setminus\{a\} \Rightarrow$
$\lvert f(x')-f(x'')\rvert< \varepsilon$

Operazioni sui limiti

$\lim (f(x)\pm\varphi(x)) = \lim f(x) \pm \lim \varphi(x)$
$\lim (f(x)\varphi(x)) = \lim f(x) \lim \varphi(x)$
$\lim (f(x)/\varphi(x)) = \lim f(x) / \lim \varphi(x)$ $\quad(\lim \varphi(x)\neq0)$

5) $\lvert f(x)\rvert>M>0$ in $U(a)$, $\lim \varphi(x)=0$, $\varphi\neq0$ per $x\neq a \Rightarrow \lim f(x)/\varphi(x) = \infty$
   $\lim \varphi(x)=0$, $\varphi(x)\neq0 \Rightarrow \lim 1/\varphi(x) = \infty$
6) $\lim f(x)=A$, $\lvert f(x)\rvert<M$ in $U(a)$, $\lim \varphi(x)=\infty$, $\varphi\neq0$ per $x\neq a \Rightarrow \lim f(x)/\varphi(x) = 0$
   $\lim \varphi(x)=\infty$, $\varphi(x)\neq0 \Rightarrow \lim 1/\varphi(x) = 0$

LIMITI UNILATERALI

Limite a destra	$f(a+0)=A \Leftrightarrow f$ definita in $[a,c)\setminus\{a\}$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\ [a,c) : \forall x\in(a,c) \Rightarrow \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ limite destro in un punto infinito: $f(-\infty)$
Limite a sinistra	$f(a-0)=A \Leftrightarrow f$ definita in $(c,a]\setminus\{a\}$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\ (a,c] : \forall x\in(c,a) \Rightarrow \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ limite sinistro in un punto infinito: $f(+\infty)$

f ha limite finito in a $\Leftrightarrow f(a+0) = f(a-0) = \lim f(x)$
$f(\infty)=A \Leftrightarrow f(+\infty) = f(-\infty) = f(\infty)$

1) f non decrescente in (a,b): f maggiorata da M $\Rightarrow \exists\ f(b-0) = A\le M$
   f non maggiorata $\Rightarrow f(b-0) = +\infty$
2) f non decrescente in (a,b): f minorata da m $\Rightarrow \exists\ f(a+0) = A\ge m$
   f non minorata $\Rightarrow f(a+0) = -\infty$
3) f non decr. in [a,b] $\Rightarrow \forall x\in(a,b)\ \exists\ f(x-0), \exists\ f(x+0)$ e $f(x-0) \le f(x) \le f(x+0)$
   f non decr. in [a,b] $\Rightarrow \exists\ f(a+0), \exists\ f(b-0), f(a) \le f(a+0), f(b-0) \le f(b)$

LIMITI NOTEVOLI

$\lim (1 + 1/x)^x = e \quad (x\to+\infty) \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus(-1,0]$
$\lim (1 + x)^{1/x} = e \quad (x\to0)$
$\lim (\sin x / x) = 1 \quad (x\to0) \quad \forall x\neq0$

CALCOLO DELLE INDETERMINAZIONI

Regola di L'Hôpital

1) *caso 0/0*

$f(x)$, $\varphi(x)$ continue, derivabili e non nulle in $U(a)\setminus\{a\}$:

$\lim f(x) = \lim \varphi(x) = 0$, $\exists \lim f'(x)/\varphi'(x) = L \Rightarrow \exists \lim f(x)/\varphi(x) = L$

2) *caso* ∞/∞

$f(x)$, $\varphi(x)$ continue, derivabili in $U(a)\setminus\{a\}$, $\varphi'(x)\neq 0$

$\lim f(x) = \lim \varphi(x) = \infty$, $\exists \lim f'(x)/\varphi'(x) \Rightarrow \exists \lim f(x)/\varphi(x) = L$

3) *caso* $\infty-\infty$ — si pone: $f - \varphi = (1/\varphi - 1/f) / (1/f\varphi)$

4) *caso* $0\cdot\infty$ — si pone: $f\varphi = f / (1/\varphi)$

5) *caso* 0^0, ∞^0, 1^∞ — si trasforma con i logaritmi nel tipo $0\cdot\infty$

5.2 LIMITE DI FUNZIONE DI PIU' VARIABILI

Limite finito in punto finito

$\lim f(\mathbf{x})=A$, $(\mathbf{x}\to \mathbf{x}^0) \Leftrightarrow$

f def. su $U(\mathbf{x}^0)\setminus\{\mathbf{x}^0\}$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x : 0<|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta \Rightarrow |f(\mathbf{x})-A|<\varepsilon$

Limite infinito in punto finito

$\lim f(\mathbf{x})= \infty$, $(\mathbf{x}\to \mathbf{x}^0) \Leftrightarrow$

f def. su $U(\mathbf{x}^0)\setminus\{\mathbf{x}^0\}$, $\forall N>0\ \exists\delta>0 : \forall x : 0<|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta \Rightarrow |f(\mathbf{x})|>N$

Limite finito in punto infinito

$\lim f(\mathbf{x})=A$, $(\mathbf{x}\to\infty) \Leftrightarrow$

f def. su $U(\mathbf{x}^0)\setminus\{\mathbf{x}^0\}$, $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0 : \forall x : 0<|\mathbf{x}|>N \Rightarrow |f(\mathbf{x})-A|<\varepsilon$

Teorema

$\lim f(\mathbf{x})=A\neq 0$ finito $\Rightarrow \exists\delta>0 : \forall x : 0<|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>|A|/2$

$(A>0 \Rightarrow f(x)>A/2\ ;\ A<0 \Rightarrow f(x)<A/2)$

Criterio di Cauchy di esistenza

$\exists \lim f(\mathbf{x})=A$ finito $\Leftrightarrow$

f def. su $U(\mathbf{x}^0)\setminus\{\mathbf{x}^0\}$, $\forall\varepsilon>0\ \exists U(\mathbf{x}^0) : \forall x'\ x'' \in U(\mathbf{x}^0)\setminus\{\mathbf{x}^0\} \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

Limite in una direzione

f def. su $U(\mathbf{x}^0)\setminus\{\mathbf{x}^0\}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ tale che $|\boldsymbol{\omega}|=1$, $t\geq 0$

$\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega}$ = semiretta nella direzione del vettore $\boldsymbol{\omega}$

$f(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega}) = f(x_1{}^0+\omega_1, \ldots, x_n{}^0+\omega_n) \Rightarrow$

$\lim f(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega})$, $(t\to 0^+)$ = limite di f nella direzione del vettore $\boldsymbol{\omega}$

f ha in $\mathbf{x}^0$ il limite $A \Rightarrow f$ ha in $\mathbf{x}^0$ limite A in ogni direzione

Operazioni sui limiti

$\lim (f(\mathbf{x})\pm\varphi(\mathbf{x})) = \lim f(\mathbf{x}) \pm \lim \varphi(\mathbf{x})$

$\lim (f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})) = \lim f(\mathbf{x}) \lim \varphi(\mathbf{x})$

$\lim (f(\mathbf{x})/\varphi(\mathbf{x})) = \lim f(\mathbf{x}) / \lim \varphi(\mathbf{x})$ $(\lim \varphi(x)\neq 0)$

LIMITE DI FUNZIONI DI PIU' VARIABILI SU UN INSIEME

Limite di funzione su insieme

$f(\mathbf{x})$ assegnata su A, $\mathbf{x}_0$ punto limite di A

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \Lambda \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists$ sfera di centro $\mathbf{x}_0$: $\forall \mathbf{x}\in A\setminus\{\mathbf{x}_0\}$ vale: $|f(\mathbf{x})-\Lambda|<\varepsilon$

Criterio di Cauchy

$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ su $A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 : \forall \mathbf{x}',\mathbf{x}''$, $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_0|<\delta, |\mathbf{x}''-\mathbf{x}_0|<\delta$ vale:

$|f(\mathbf{x}')- f(\mathbf{x}'')|<\varepsilon$

5.3 CONTINUITA' DI FUNZIONE DI UNA VARIABILE

Incremento della funzione: $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x)-f(x) = f(x+h)-f(x)$

Funzione continua:
f su $[a,b]$ continua in $x \Leftrightarrow \lim \Delta y = 0$ quando $\Delta x \to 0$
$f(x)$ continua in $a \Leftrightarrow f$ def. su $U(a)$, $\lim f(x)=f(a)$
$f(x)$ continua in $a \Leftrightarrow f$ def. su $U(a)$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall|x-a|<d \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$
$f(x)$ continua in $a \Leftrightarrow f(a+h)$ def. su h, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall|h|<d \Rightarrow |f(a+h)-f(a)|<\varepsilon$

Funzione discontinua: f def. su $U(a)$, $\exists\varepsilon_0>0 : \forall\delta>0\ \exists x_\delta : |a-x_\delta|<d \Rightarrow |f(a)-f(x_\delta)|\geq\varepsilon_0$

Teoremi:
1) $f(x)$, $\varphi(x)$ continue in $a \Rightarrow$ continue $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x)\,\varphi(x)$, $f(x)/\varphi(x)$ $(\varphi(x)\neq 0)$
2) $\varphi(x)$ continua in a, $f(x)$ continua in $\varphi(x) \Rightarrow f(\varphi(x))$ continua in a
3) $f(x)$ continua in $a \Rightarrow \exists\ U(a)$ in cui $f(x)$ è limitata
4) $f(x)$ continua in a, $f(a)\neq 0 \Rightarrow \exists U(a)$ in cui $\forall x\in U(a)\ |f(x)|>|f(a)|/2$
$(f(a)>0 \Rightarrow f(x)> f(a)/2\ ;\ f(a)<0 \Rightarrow f(x)< f(a)/2)$

Discontinuità eliminabile: $f(x)$ discontinua in a, $\exists \lim f(x)$ finito per $x\to a$

Discontinuità infinita: $f(x)$ continua $\forall x\in U(a)\setminus\{a\}$, $f(x)$ illimitata in $U(a)$

Continuità a destra e sinistra:
$f(x)$ continua a destra in $a \Leftrightarrow \exists\ f(a+0)$, $f(a+0)= f(a)$
$f(x)$ continua a sinistra in $a \Leftrightarrow \exists\ f(a-0)$, $f(a-0)= f(a)$
$f(x)$ continua a destra e a sinistra in $a \Leftrightarrow f$ continua in a, $f(a-0)= f(a)= f(a+0)$

Discontinuità di 1° specie:
$\exists\ f(a-0)$, $\exists\ f(a+0)$, f discontinua in a
f monotona in $[a,b] \Rightarrow \forall x\in[a,b]$, f continua o ha discontinuità di 1° specie

Discontinuità di 2° specie: f definita su $U(a)\setminus\{a\}$, f discontinua non di 1° specie

CONTINUITA' E REGOLARITA' IN UN INTERVALLO CHIUSO

Funzione continua in $[a,b]$:
f continua in $[a,b] \Leftrightarrow f$ continua $\forall x\in[a,b]$, $f(a+0)= f(a)$, $f(b-0)= f(b)$
1) f continua in $[a,b] \Rightarrow f$ limitata in $[a,b]$
2) f continua in $[a,b] \Rightarrow f$ ha max e min in $[a,b] \Rightarrow \min f(x) \leq f(x) \leq \max f(x)$
3) f continua in $[a,b]$, $f(a),f(b)$ discordi e $\neq 0 \Rightarrow \exists\ c\in(a,b) : f(c)=0$
4) f continua in $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A<C<B \Rightarrow \exists\ c\in(a,b) : f(c)=C$
(f continua in un intervallo assume tutti i valori intermedi tra gli estremi)

(Continuità dell'inversa):
5) f continua strettamente crescente in $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B \Rightarrow$
$[A,B]$ = immagine di (a,b), f^{-1} continua strettamente crescente in $[a,b]$
6) f continua strettamente crescente in (a,b), $\inf f(x)=A$, $\sup f(x)=B \Rightarrow$
$[A,B]$ = immagine di (a,b), f^{-1} continua strettamente crescente in (a,b)

Regolarità:
f regolare in $[a,b] \Leftrightarrow f$ ha derivata continua in $[a,b] \Leftrightarrow$
f continua in $[a,b]$, $\exists\ f'$ in (a,b), $\exists\ f(a+0)$, $\exists\ f(b-0)$
f regolare in $[a,b] \Rightarrow f$ continua in $[a,b]$

Continuità a tratti: f continua a tratti in $[a,b] \Leftrightarrow f$ definita e continua in $[a,b]$ eccetto x_j punti finiti in cui $\exists$ i limiti destro e sinistro

Regolarità a tratti: f regolare a tratti in $[a,b] \Leftrightarrow f$ continua a tratti, f' continua a tratti in (a,b)

5.4 CONTINUITA' DI FUNZIONE DI PIU' VARIABILI

Incremento della funzione — $\Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$

Funzione continua — $f(x)$ continua in $\mathbf{x}^0 \Leftrightarrow f$ def. su $U(\mathbf{x}^0)$, $\lim f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)$
$f(x)$ continua in $\mathbf{x}^0 \Leftrightarrow \lim \Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0) = 0$, $(\mathbf{h} \to 0)$

Teoremi
1) $f(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x})$ continue in $\mathbf{x}^0 \Rightarrow$ continue $f(\mathbf{x}) \pm \varphi(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})/\varphi(\mathbf{x})$ $(\varphi(\mathbf{x}) \neq 0)$
2) $f(x_1, \ldots, x_m)$ continua in $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, $m<n \Rightarrow$
   $F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_m)$ continua rispetto a $(x_1, \ldots, x_n)$ in ogni punto della forma $(x_1^0, \ldots, x_m^0, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$ con $x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0$ arbitrari
3) $f(x_1, \ldots, x_m)$ continua in $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, $\varphi_j(\mathbf{u}) = \varphi_j(u_1, \ldots, u_n)$ continua in
   $(u_1^0, \ldots, u_m^0)$, $\varphi_j(\mathbf{u}^0) = x_j^0 \Rightarrow F(\mathbf{u}) = F(\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{u}))$ continua in $\mathbf{u}^0$
4) $f(\mathbf{x})$ continua in $\mathbf{x}^0$, $f(\mathbf{x}^0) \neq 0 \Rightarrow f(\mathbf{x})$ conserva il segno di $\mathbf{x}^0$ in $U(\mathbf{x}^0)$
   $f(\mathbf{x})$ continua, definita in $R_n \Rightarrow \forall c$, l'insieme G dei punti $\mathbf{x}$: $f(\mathbf{x})>c$ è aperto
   $f(\mathbf{x})$ continua, definita in $R_n \Rightarrow \forall c$, l'insieme G dei punti $\mathbf{x}$: $f(\mathbf{x})<c$ è aperto

CONTINUITA' DI FUNZIONI DI PIU' VARIABILI SU UN INSIEME

Funzione continua su insieme — $f(\mathbf{x})$ definita su A è continua $\Leftrightarrow \lim f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$
$\mathbf{x}_0$ punto isolato di A $\Rightarrow f(\mathbf{x})$ definita su A è continua su A
$f(\mathbf{x})$ definita su A è continua in ogni punto di A $\Rightarrow f(\mathbf{x})$ continua su A

Modulo di continuità — dati $f(\mathbf{x})$ limit. su A, $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta$, mod. di cont. di f su A: $\omega(\delta) = \sup |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')|$
$\omega(\delta) \geq 0$; $\omega(\delta_1+\delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$; $\omega(m\delta) \leq m\,\omega(\delta)$
$\lim \omega(\delta) = \lambda \geq 0$ $(\delta \to 0^+)$

Funzione uniform. continua — $f(\mathbf{x})$ uniformemente continua su A $\Leftrightarrow \lim \omega(\delta) = 0$

Oscillazione — dati: $f(\mathbf{x})$ limitata su A, $\mathbf{x}_0 \in A$, $\delta>0$, $M_\delta = \sup f(\mathbf{x})$, $m_\delta = \inf f(\mathbf{x})$, $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta$
   oscillazione di f in $\mathbf{x}_0$: $\omega(\mathbf{x}_0) = \lim (M_\delta - m_\delta)$ $(\delta \to 0^+)$

Teoremi:
1) $f(\mathbf{x})$ continua su A limitato e chiuso $\Rightarrow f(\mathbf{x})$ limitata su A
2) $f(\mathbf{x})$ continua su A limitato e chiuso $\Rightarrow f(\mathbf{x})$ ha massimo e minimo in A
3) $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$: $\forall \mathbf{x}',\mathbf{x}''$, $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta$ vale: $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')|<\lambda+\varepsilon$ $(\lambda = \lim \omega(\delta))$
4) $f(\mathbf{x})$ continua su A limitato e chiuso $\Rightarrow f(\mathbf{x})$ uniformemente continua su A
   $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$: $\forall \mathbf{x}',\mathbf{x}''$, $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta$ vale: $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')|<\varepsilon$
5) $f(\mathbf{x})$ definita su A limitato e chiuso, continua su A in $\mathbf{x}_0 \in A \Leftrightarrow \omega(\mathbf{x}_0) = 0$
   (la sua oscillazione in $\mathbf{x}_0$ è nulla)
6) A limitato e chiuso, $\lambda>0 \Rightarrow E_\lambda = \{\, \mathbf{x} \in A : \omega(\mathbf{x}) \geq \lambda \,\}$ è insieme chiuso
7) $f(\mathbf{x})$ uniformemente continua su A non chiuso $\Rightarrow f(\mathbf{x})$ può essere
   prolungata in modo unico su un insieme su cui è definita e continua