2. INSIEMI NUMERICI

2.1 GLI ASSIOMI DEI NUMERI REALI

ASSIOMI DEI NUMERI REALI

I) Assiomi di ordinamento	O_1	$\forall a,b$ vale una sola tra le relazioni: $a = b$, $a > b$, $a < b$	
	O_2	$a<b,\ b<c \Rightarrow a < c$	*(proprietà transitiva)*
	O_3	$a<b \Rightarrow \exists c : a<c<b$	
II) Assiomi della somma		$\forall$ (a,b) $\exists$ a+b detto SOMMA	
	S_1	$a+b = b+a$	*(proprietà commutativa)*
	S_2	$(a+b)+c = a+(b+c)$	*(proprietà associativa)*
	S_3	$\forall a, \exists 0 : a+0 = a$	
	S_4	$\forall a, \exists(-a) : a+(-a) = 0$	
	S_5	$\forall c,\ a<b \Rightarrow a+c < b+c$	
III) Assiomi del prodotto		$\forall$ (a,b) $\exists$ ab detto PRODOTTO	
	P_1	$ab = ba$	*(proprietà commutativa)*
	P_2	$(ab)c = a(bc)$	*(proprietà associativa)*
	P_3	$\forall a, \exists 1 : a\cdot 1 = a$	
	P_4	$\forall a\neq 0, \exists(1/a) : a(1/a) = 1$	
	P_5	$(a+b)c = ac+bc$	*(proprietà distributiva)*
	P_6	$c>0,\ a<b \Rightarrow ac < bc$	
IV) Assioma di Archimede		$\forall c>0, \exists n\in\mathbb{N} : n>c$	
V) Esistenza di limite per success. limitate di numeri reali		$\{ a_n \}$ successione non decr. e lim. sup. da M $\Rightarrow \exists a :\ \lim a_n = a \leq M$	
Conseguenze degli assiomi		0 e 1 sono unici, $1>0$ $\exists$ la differenza $a-b = a+(-b)$ e il quoziente $a/b = a(1/b)$ unici $\forall \varepsilon>0, \exists n\in\mathbb{N} : 1/n<\varepsilon$	
Numeri infiniti		estendiamo il termine di numero a $+\infty$ e $-\infty$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ vale $-\infty < a < +\infty$ (si verificano gli assiomi di ordinamento) $a\,(+\infty) = \infty$; $a\,(-\infty) = -\infty$	

2.2 I NUMERI NATURALI

Somma dei primi quadrati $\Sigma\, k^2 = \dfrac{2n^3-3n^2+n}{6}$ $(k=0,1,\dots n-1)$

Fattoriale $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$; $0! = 1$

COEFFICIENTI BINOMIALI

Coefficiente binomiale $C^k_n = \dfrac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $(k=0,1,2\ldots,n)$

Proprietà $C^0_n = C^n_n = 1$; $C^{k+1}_{n+1} = C^k_n + C^{k+1}_n$

2.3 I NUMERI RAZIONALI

Insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q} = \{ \pm\, p/q : p,q \in \mathbb{Z}\,,\ p\geq 0,\ q>0 \}$

Somma $p_1/q_1 + p_2/q_2 = (p_1q_2 + p_2q_1) / q_1q_2$

Disuguaglianze $\pm\, p_1/q_1 = \pm\, p_2/q_2$ *se* $p_1q_2 = p_2q_1$ e i segni sono uguali ; $\pm\, 0/q = 0$
$p_1/q_1 < p_2/q_2$ *se* $p_1q_2 < p_2q_1$

Sviluppo decimale $\pm\, p/q = \pm\, \alpha_0\,,\, \alpha_1 \ldots \alpha_m\, \gamma_1 \ldots \gamma_s\, \gamma_1 \ldots \gamma_s \ldots$ = frazione decimale periodica infinita di periodo $\gamma_1 \ldots \gamma_s \neq 9$

2.4 I NUMERI IRRAZIONALI

Sviluppo decimale $a = \pm\, \alpha_0\,,\, \alpha_1 \ldots$ = frazione decimale non periodica infinita

Numero neperiano $e = \lim\, (1+1/n)^n = 2.718281\ldots$
$e \approx 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \ldots + 1/(n-1)!$

2.5 I NUMERI REALI

Insieme dei numeri reali $\mathbb{R} = \{ \mathbb{Q} + \text{irrazionali} \}$
Sviluppo decimale $a = \pm\, \alpha_0\,,\, \alpha_1 \ldots$ = frazione decimale infinita
(periodica $\Rightarrow$ numero razionale, non periodica $\Rightarrow$ numero irrazionale)

SEGNO
Segno $\operatorname{sign} a = \begin{cases} 1 & (a>0) \\ -1 & (a<0) \end{cases}$

VALORE ASSOLUTO
Valore assoluto $|\, a\,| = \begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

Disuguaglianze $|\, a-b\,| < \varepsilon \Leftrightarrow b-\varepsilon < a < b+\varepsilon$; $|\, a-b\,| \leq \varepsilon \Leftrightarrow b-\varepsilon \leq a \leq b+\varepsilon$
$|\, a+b\,| \leq |a| + |b|$; $|\, a - b\,| \geq |\, |a| - |b|\, |$

Disuguaglianza di Bernoulli $|\, a^h - 1\,| \leq 2\,(a-1)\,|h|$ $(|h|\leq 1,\ a\geq 1)$

POTENZA

Potenza (esponente naturale)	$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n volte) $(a>0,\ n\in\mathbb{N})$; $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$; $a^0 = 1$
	$(a+b)^n = a^n + b\,[\,(a+b)^{n-1} + a(a+b)^{n-2} + \ldots + a^{n-2}(a+b) + a^{n-1}\,]$
Formula di Newton:	$(a+x)^n = \Sigma\,(C^k{}_n)\,a^{n-k}\,x^k$ $(k=0,1,2\ldots,n)$
	$(1+\lambda)^n > 1+n\lambda$ $(\lambda>0,\ n\in\mathbb{N})$
Potenza (esponente razionale)	$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p$; $a^0 = 1$; $a^{-p/q} = 1/a^{p/q}$ $(a>0,\ (p/q)>0)$
	$a^{r+s} = a^r\,a^s$; $r<s \Rightarrow a^r < a^s$ $(a>1)$
Potenza (esponente reale)	a^b $(a>0)$
	$a^{x+y} = a^x\,a^y$; $x<y \Rightarrow a^x < a^x$ $(a>1)$; $a^{xy} = (a^x)^y$
	$(xy)^a = x^a \cdot y^a$

POLINOMIO

Polinomio di grado n	$P_n(x) = a^0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ $(n\in\mathbb{N})$

RADICE ENNESIMA

Radice	$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ = valore aritmetico della n-esima radice di a $(a\geq 0,\ n\in\mathbb{N})$
	dato $a = b^n$, $\exists!\ b = \sqrt[n]{a}$

LOGARITMO

Logaritmo	$\log_a x$ = esponente tale che $a^{\log x} = x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$
Proprietà	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
	$\log_a x^b = b\,\log_a x$
	$\log_a b \cdot \log_b a = 1$
Logaritmo naturale	$\log x = \log_e x$

FORMULE TRIGONOMETRICHE

$\sin(x+\pi/2) = \cos x$; $\sin(x+\pi) = -\sin x$; $\sin(x+3\pi/2) = -\cos x$; $\sin(x+2\pi) = \sin x$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$

$2x/\pi \leq \sin x \quad (0\leq x\leq \pi/2)$