3. SUCCESSIONI

3.1 LE SUCCESSIONI

Successione	$\{ x_n \} = \{ x_1, x_2, x_3 \dots x_n, \dots \}$: ad ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ è messo in corrispondenza x_n
Elemento della successione	x_i
Successione costante	$\{ x_n \}$ con $x_n = c, \forall n$
Successione monotona	$\{ x_n \}$ non decrescente $\Leftrightarrow x_k \le x_{k+1}$ $(k=0,1,2,\dots)$ $\{ x_n \}$ non crescente $\Leftrightarrow x_k \ge x_{k+1}$ $(k=0,1,2,\dots)$
Successione sup. limitata	$\exists M \in \mathbb{N} : x_k \le M$ $(k=0,1,2,\dots)$
Successione limitata	$\mid x_n \mid \le M$

LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Limite	$\lim x_n = a$; $x_n \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n > N$ vale $\mid x_n - a \mid < \varepsilon$ Definizioni equivalenti: 1) $\forall U(a), \exists N : \forall n > N$ vale $x_n \in U(a)$ 2) ogni intorno di a ha all'esterno un insieme finito o vuoto di x_n Il limite se esiste è unico
Teoremi	1) $x_n \to a \Rightarrow \mid x_n \mid < M$ 2) $x_n \to a \neq 0 \Rightarrow \exists N : \mid x_n \mid > \lvert a \rvert /2$ $\quad (a>0 \Rightarrow x_n > a/2$; $a<0 \Rightarrow x_n < a/2)$ 3) $x_n \to a$, $y_n \to b$, $x_n \le y_n \Rightarrow a \le b$ 4) $x_n \to a$, $y_n \to a$, $x_n \le z_n \le y_n \Rightarrow z_n \to a$ 5) $x_n \to a \Rightarrow \mid x_n \mid \to \lvert a \rvert$
Limite di success. monotone	$x_k \le x_{k+1}$ $\quad x_n$ maggiorata da $M \Rightarrow \lim x_n = L \le M$ $\quad x_n$ non maggiorata $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$ $x_k \ge x_{k+1}$ $\quad x_n$ minorata da $m \Rightarrow \lim x_n = L \ge m$ $\quad x_n$ non minorata $\Rightarrow \lim x_n = -\infty$
Criterio di Cauchy di esistenza	$\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n,m > N$ vale $\mid x_n - x_m \mid < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall n > N, p \in \mathbb{N}$, vale $\mid x_{n+p} - x_n \mid < \varepsilon$
Operazioni sui limiti	$\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$ $\lim (x_n\, y_n) = \lim x_n \lim y_n$ $\lim (x_n / y_n) = \lim x_n / \lim y_n$ $(\lim x_n \neq 0)$

INFINITESIMI E INFINITI

Grandezza infinitesima	$\lim \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n > N$ vale $\mid \alpha_n \mid < \varepsilon$; $x_n \to a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$
Grandezza infinita	$\lim \beta_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N : \forall n > N$ vale $\mid \beta_n \mid > M$ $\beta_n > 0 \Rightarrow \lim \beta_n = +\infty$; $\beta_n < 0 \Rightarrow \lim \beta_n = -\infty$
Proprieta'	1) $\mid x_n \mid < M$, $y_n \to \infty \Rightarrow x_n / y_n \to 0$ $\qquad C \neq 0$, $y_n \to \infty \Rightarrow c/y_n \to 0$ 2) $\mid x_n \mid > m$, $m>0$; $y_n \to 0$, $y_n \neq 0 \Rightarrow x_n/y_n \to \infty$ $\qquad C \neq 0$; $y_n \to 0 \Rightarrow c/y_n \to \infty$
LIMITI NOTEVOLI	$\{ 1/n \} \to 0$ $\qquad \{ \sqrt[k]{n} \} \to \infty$ $\qquad \{ n^k/a^n \} \to 0$ $(a>1, k \in \mathbb{N})$ $\{ (n-1)/n \} \to 1$ $\qquad \{ \sqrt[n]{n} \} \to 1$ $\qquad \{ a^n \} \to \infty$ $(a>1)$ $\{ (1+1/n)^n \} \to e$ $\qquad \{ a^n/n! \} \to 0$

3.2 LE SOTTOSUCCESSIONI

Sottosuccessione	$\{ x_{nk} \} = \{ x_{n1}, x_{n2}, x_{n3} \ldots\}$ con $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ $\{ x_n \} \to L \Rightarrow \{ x_{nk} \} \to L$; $\{ x_n \} \to \pm\infty \Rightarrow \{ x_{nk} \} \to \pm\infty$
Teorema	$\forall\{ x_n \} \Rightarrow \exists \{ x_{nk} \}$ convergente ad un numero finito o infinito
Teorema di Weierstrass	$\{ x_n \}$ limitata $\Rightarrow \exists \{ x_{nk} \}$ convergente ad un numero finito
Limite superiore e inferiore	$a = \limsup x_n \Leftrightarrow \exists \{ x_{nh} \} \to a$, $\forall\exists \{ x_{nk} \}$ vale $\{ x_{nk} \} \to a' \le a$ $a = \liminf x_n \Leftrightarrow \exists \{ x_{nh} \} \to a$, $\forall\exists \{ x_{nk} \}$ vale $\{ x_{nk} \} \to a' \ge a$ $\forall\varepsilon>0$, $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ contiene infiniti x_n , ci sono finiti x_n a destra di $\limsup x_n$ e a sinistra di $\liminf x_n$
Teoremi	1) ogni $\{ x_n \}$ tende ad un $\limsup x_n$ o $\liminf x_n$ finito o infinito $\{ x_n \}$ limitata $\Rightarrow$ limiti $\sup x_n$ e $\liminf x_n$ finiti 2) $\liminf x_n \le \limsup x_n$; $\exists \lim x_n$ finito $\Rightarrow \liminf x_n = \limsup x_n = \lim x_n$ 3) ogni $\{ x_{nk} \}$ contiene una sottosuccessione convergente ad $a \Rightarrow \lim x_n = a$ $\liminf x_n = -\limsup (-x_n)$ $\{x_n\}\{y_n\}$ limitate: $\limsup (x_n+y_n) \le \limsup x_n + \limsup y_n$ $\liminf (x_n+y_n) \ge \liminf x_n + \liminf y_n$ 4) $\lim x_n = a>0 \Rightarrow \limsup (x_n\, y_n) = a \limsup (y_n)$

3.3 IL QUINTO ASSIOMA DEI REALI

ASSIOMA V ED EQUIVALENTI

Intervalli chiusi inclusi	$\sigma_n = [a_n,b_n]$, $\sigma_n \subset \sigma_{n+1}$, $a_n-b_n \to 0 \Rightarrow \exists c \in$ tutti gli intevalli
Insiemi limitati	$A \subset\mathbb{R}$, A maggiorato da $M \Rightarrow \exists \sup A \le M$ $A \subset\mathbb{R}$, A minorato da $m \Rightarrow \exists \inf A \ge m$
Sezioni di $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}=A\cup B$ $(A,B,A\cap B\ne\emptyset)$, $a\in A$, $b\in B$, $a<b$ $\exists \max A \Rightarrow \nexists \min B$ $\exists \min A \Rightarrow \nexists \max A$
Assioma V	$\exists$ limite per ogni successione limitata monotona

3.4 LE SERIE

Serie	$S_n = \Sigma\, s_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ $\{ s_n \} = \{ s_1, s_2, s_3, \ldots \}$
Convergenza	$\lim s_n = S \Rightarrow$ la serie converge $\Rightarrow S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$
Serie di Taylor	$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \ldots$
SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR	$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$ $\quad(-\infty<x<\infty)$ $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! + \ldots$ $\quad(-\infty<x<\infty)$ $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! + \ldots$ $\quad(-\infty<x<\infty)$ $(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)x^2/2! + m(m-1)(m-2)x^3/3! + \ldots$ $\quad(-1<x<1)$ $\log (1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$ $\quad(-1<x\le1)$