## La fisica di Feynmann

# Elettromagnetismo

## 4.1 ELETTROSTATICA

### Forza e campo elettrostatico

| | |
|---|---|
| Legge di Coulomb | $\underline{F}_1 = -\underline{F}_2 = [\, 1 / ( 4\pi\, \varepsilon_0 ) \,] ( q_1\, q_2 / r_{12}^2 )\, \underline{\mathbf{e}}_{12}$ |
| Forza elettrostatica | $\underline{F} = q_1\, q_2\, \underline{r} / ( 4\pi\, \varepsilon_0\, r^3 )$ |
| | vale il principio di sovrapposizione: la forza su una carica è la somma vettoriale delle forze esercitate da tutte le altre cariche |
| Campo elettrostatico | descrive una proprietà di un punto, anche se non vi si trova una carica |
| | $\underline{E}(1) = q_2\, \underline{r} / ( 4\pi\, \varepsilon_0\, r^3 )$ |
| Campo prodotto da n cariche | $\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \ldots + \underline{E}_n$ |
| | $\underline{E}(1) = \Sigma\, [\, q_i\, \underline{r}_i / ( 4\pi\, \varepsilon_0\, r_i^3 ) \,] = 1/(4\pi\varepsilon_0) \int \rho(2)\, \underline{r}\, dV_2 / r^3$ |
| Potenziale elettrico | $\phi = -\int_{(Po,P)} \underline{E} \cdot d\underline{s}$ |
| | prendendo $P_0$ all'infinito, vale: $\phi(x,y,z) = q / ( 4\pi\, \varepsilon_0\, r )$ |
| | è un artificio utile per fare i calcoli, corrisponde all'energia potenziale che avrebbe l'unità di carica se fosse posta nel punto indicato |
| Energia potenziale | $U = q_1\, q_2 / ( 4\pi\, \varepsilon_0\, r )$ |
| | l'energia potenziale è nulla a distanza infinita |
| | quando l'energia potenziale è costante non vi è campo |
| Lavoro per spostare una carica | $W = -\int \underline{E} \cdot d\underline{s}$ *(a, b)* $= \phi(b) - \phi(a)$ |
| Forza su una carica statica | $\underline{F} = q\, \underline{E}$ |
| Energia potenziale di una carica | $U = -\int \underline{F}\, d\underline{s} = q\, \phi$ |
| Energia potenziale di più cariche | se ci sono molte cariche, l'energia è data da : |
| | $U = \Sigma_{\text{tutte le coppie}} [\, q_i\, q_j / ( 4\pi\, \varepsilon_0\, r_{ij} ) \,]$ |
| | corrisponde al lavoro fatto per avvicinare le cariche da distanza infinita |
| Flusso del campo elettrico | flusso di $\underline{E} = \int_S E_n\, da = \begin{cases} 0 & \text{se q è fuori di S} \\ q/\varepsilon_0 & \text{se q è fuori di S} \end{cases}$ |
| Equilibrio | in un campo elettrostatico per una carica puntiforme non ci sono posizioni di equilibrio (eccetto che a ridosso di una carica di segno opposto): fallimento del modello di Thompson per l'atomo |
| | non è stabile neppure il modello dinamico di Rutheford e Bohr perché gli elettroni irradierebbero energia e cadrebbero nel nucleo |

### Leggi fondamentali dell'elettrostatica

**EQUAZIONI DI MAXWELL DELL'ELETTROSTATICA**

| | |
|---|---|
| I Legge di Gauss | il flusso totale uscente da una superficie chiusa è proporzionale alla carica totale interna (è un'espressione diversa della legge di Coulomb) |
| | $\int_S E_n\, da = Q_{int} / \varepsilon_0$ dove: $Q_{int} = \int \rho\, dV$ |
| | la forma differenziale della legge è: $\nabla \cdot \underline{E} = \rho / \varepsilon_0$ |
| II | la circolazione del campo elettrico è nulla |
| | $\nabla \wedge \underline{E} = \mathbf{0}$ |
| | quindi il campo dovuto alla legge di Coulomb è un gradiente: |
| | $\underline{E} = -\nabla\phi = ( -\partial\phi/\partial x, -\partial\phi/\partial y, -\partial\phi/\partial z )$ |
| Equazione di Poisson | le due equazioni di Maxwell sono combinabili nell'equazione: |
| | $\nabla^2\, \phi = -\rho / \varepsilon_0$ |
| | se $\rho(x,y,z)$ è conosciuta in ogni punto, la soluzione dell'equazione nel |

| | |
|---|---|
| | caso generale è: $\phi(1) = 1/(4\pi\varepsilon_0) \int \rho(2)\, dV_2 / r$<br>(quindi la soluzione dei problemi elettrostatici è chiara quando sono note le posizioni delle cariche) |
| Equazione di Laplace | $\nabla^2\phi = 0$<br>se non si conosce la distribuzione di carica, è usata per trovare il campo in presenza di conduttori sotto la condizione che $\phi$ sia costante sulle superfici<br>è possibile partendo da una qualunque funzione ordinaria arrivare a due funzioni U(x,y) e V(x,y) soluzioni dell'equazione di Laplace in due dimensioni, ciascuna delle quali rappresenta un possibile potenziale elettrostatico |
| Energia di una distribuzione di carica | $U = ½ \int \rho(1)\, \phi(1)\, dV_1$<br>l'energia si conserva localmente, l'elettrostatica non ci dice dov'è l'energia se non dove c'è un campo elettrico<br>vale: $U = \int_{\text{(tutto lo spazio)}} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}\ dV$<br>cioè è possibile rappresentare l'energia di ogni distribuzione di carica come un integrale su una densità di energia localizzata nel campo (idea incompatibile con l'esistenza di cariche puntiformi) |

**DIPOLO ELETTRICO**

| | |
|---|---|
| Dipolo | coppia di cariche puntiformi q e –q molto vicine<br>porremo l'asse z passante per le cariche e l'origine nel punto medio |
| Momento dipolare delle cariche | $p = q\, d$ |
| Potenziale di un dipolo | $\phi(r) = [\, 1 / (4\pi\,\varepsilon_0)\, ]\ \ [\, \underline{\mathbf{p}}\, \underline{\mathbf{r}} / r^3\, ]$<br>mentre il potenziale di una carica decresce come 1/r, il potenziale di un dipolo decresce come $1/r^2$<br>se $\Phi_0$ = potenziale dell'unità di carica puntiforme, vale:<br>$\phi(r) = -\, \underline{\mathbf{p}} \cdot \nabla\Phi_0$ |
| Campo elettrico di un dipolo | $E_x = [\, p/(4\pi\varepsilon_0)\, ]\, [\, 3z\, x / r^5\, ]$<br>$E_y = [\, p/(4\pi\varepsilon_0)\, ]\, [\, 3z\, y / r^5\, ]$<br>$E_z = [\, p/(4\pi\varepsilon_0)\, ]\, [\, (3 \cos^2\vartheta - 1) / r^5\, ]$ |
| Momento di forza su un dipolo el. | $\underline{\boldsymbol{\tau}} = \underline{\mathbf{p}} \wedge \underline{\mathbf{E}}$ |
| Energia elettrostatica di un dipolo el. | $\underline{\mathbf{U}} = -\underline{\mathbf{p}} \cdot \underline{\mathbf{E}}$ |

**DIELETTRICI**

| | |
|---|---|
| Dielettrico | è un materiale che non conduce elettricità (isolante)<br>se si pone un dielettrico tra le lastre di un condensatore la capacità aumenta di un fattore K (costante dielettrica) che è una proprietà del dielettrico: la costante dielettrica del vuoto è l'unità |
| Momento dipolare | il momento dipolare per unità di volume è dato da:<br>$\underline{\mathbf{P}} = N\, q\, \underline{\mathbf{d}}$ ( N = atomi per unità di volume, d = distanza tra le cariche)<br>in un dielettrico $\underline{\mathbf{P}}$ è proporzionale al campo $\underline{\mathbf{E}}$ (la costante dipende dal materiale): $\underline{\mathbf{P}} = \chi\, \varepsilon\, \underline{\mathbf{E}}$<br>vale $K = 1 + \chi$ ($\chi$ è detta suscettività elettrica del dielettrico) |
| Equazioni dell'elettrostatica | in presenza del dielettrico vale:<br>I. $\nabla \cdot (K\, \underline{\mathbf{E}}) = \rho_{lib} / \varepsilon_0$<br>II. $\nabla \wedge \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ |
| *Nota storica:* | all'inizio si definì un vettore $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\, \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{P}}$ per cui le equazioni erano:<br>$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = \rho_{lib}$ ; $\nabla \wedge \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ e si poneva $\underline{\mathbf{D}} = K\, \varepsilon_0\, \underline{\mathbf{E}} = \varepsilon\, \underline{\mathbf{E}}$ dove $\varepsilon$ è detta Permettività |
| Campo elettrico | in presenza del dielettrico, il campo si riduce di un fattore 1/K: |

| | |
|---|---|
| | K $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0$ |
| | anche il voltaggio è ridotto dello stesso fattore |
| | se un campo E induce un momento dipolare medio per unità di volume P, allora K è data da $K-1 = P / (\varepsilon_0 E)$ |

## Esempi di campo elettrostatico

| | |
|---|---|
| *Densità di carica* | *$\lambda$ = carica per unità di lunghezza* |
| | *$\sigma$ = carica per unità d'area* |
| | *$\rho$ = carica per unità di volume* |

| | |
|---|---|
| **CARICA LINEARE** | |
| Campo | $E = \lambda / (2\pi \varepsilon_0 r)$ |
| **LAMINA INFINITA CARICA** | |
| Campo | $E = \sigma / (2\varepsilon_0)$ |
| **DUE LAMINE PARALLELE (condensatore)** | |
| Campo | E (fra le lamine) $= \sigma / \varepsilon_0$ |
| | E (fuori) = 0 |
| Voltaggio (differenza di potenziale) | $V = \phi_1 - \phi_2 = E\, d = d\, Q / (\varepsilon_0 A)$ |
| | è il lavoro per unità di carica necessario per portare una piccola carica da una lastra all'altra |
| | A = area della lastra |
| Capacità | $C = \varepsilon_0 A / d$ |
| | formula approssimata in quanto il campo non è uniforme tra le lastre |
| | un condensatore con grande capacità serve ad immagazzinare cariche generando ai terminali un voltaggio molto piccolo, quindi assorbe e fornisce grandi quantità di cariche senza variare di molto il potenziale |
| | in presenza di dielettrici vale: $C = K \varepsilon_0 A / d$ |
| Differenza di potenziale | $V = Q / C$ |
| Lavoro | il lavoro necessario per trasferire la carica dQ è: $dU = V\, dQ$ |
| Energia | $U = ½\, C V^2 = ½\, Q^2\, C$ |
| Forza tra le lastre | $F = Q^2 / (2 \varepsilon_0 A) = ½\, Q E$ |
| | E = campo elettrico tra le lastre |
| | in presenza di dielettrico vale: |
| | $F_x = (V^2/2)\, \partial C/\partial x$ (vera in pratica solo se è un liquido) |
| **SFERA PIENA CARICA** | |
| Campo | $E = Q\, r / (4\pi \varepsilon_0) = \rho\, r / (3\varepsilon_0)$ |
| Energia potenziale | $U = 3\, Q^2 / (5\pi \varepsilon_0 r)$ |
| **GUSCIO SFERICO CARICO** | |
| Campo | E (dentro) = 0 |
| | E (fuori) = E (carica puntiforme) |
| Energia | $U = ½\, Q^2 / (4\pi \varepsilon_0 r)$ |

| | |
|---|---|
| **CONDUTTORE** | |
| Campo | E (dentro) = 0 |
| | E (fuori) $= \sigma / \varepsilon_0$ |
| | se il conduttore ha una cavità, in essa non vi sono campi |
| Campo di un conduttore appuntito | è approssimabile a due sfere di raggio diverso collegate da un filo (che mantiene lo stesso potenziale): il campo è più intenso alla superficie della sfera piccola, quindi il campo è più intenso vicino a regioni di curvatura maggiore (punte) |

**SUPERFICIE SFERICA CON DISTRIBUZIONE DI CARICA NON UNIFORME**

| | |
|---|---|
| Campo | una sfera di raggio a con densità di carica superficiale $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$ produce un campo uguale a quello di un dipolo di momento $p = 4\pi \sigma_0 a^3 / 3$<br>Internamente alla sfera si ha il campo costante $E = \sigma_0 / 3\varepsilon_0$ |

**APPROSSIMAZIONE DIPOLARE PER UNA DISTRIBUZIONE ARBITRARIA**

| | |
|---|---|
| Distribuzione arbitraria di cariche | ci interessiamo al campo a grande distanza<br>• se la carica complessiva non è nulla il potenziale è: $\phi = Q / ( 4\pi \varepsilon_0 R )$ (l'aggregato si comporta come una carica puntiforme)<br>• se la carica complessiva è neutra il potenziale è: $\phi(r) = [ 1 / ( 4\pi \varepsilon_0 ) ] [ \underline{\mathbf{p}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_r / R^2 ]$ (l'aggregato di comporta come un dipolo) |

**CARICA VICINO AD UNA LASTRA CONDUTTRICE**

| | |
|---|---|
| Campo in vicinanza di conduttori | una carica positiva vicino ad una lastra conduttrice produce un campo equivalente al campo prodotto dalla carica positiva e da una carica immagine negativa |
| Densità di carica sulla lastra | $\sigma(\rho) = - 2 a q / [ 4\pi ( a^2 + \rho^2 )^{3/2} ]$ |
| Forza sulla carica verso la lastra | $\sigma(\rho) = [ 1 / ( 4\pi \varepsilon_0 ) ] \; q^2 / (2a)^2$ |

**OSCILLAZIONI NEL PLASMA**

| | |
|---|---|
| Plasma | gas ionizzato formato da ioni ed elettroni distribuiti nello spazio<br>si può trascurare il moto degli ioni positivi più pesanti |
| Campo elettrico | $E_x = [ n_0 q_e / \varepsilon_0 ] s + k$<br>$n_0$ = densità degli elettroni all'equilibrio |
| Forza su un elettrone | $F_x = - [ n_0 q_e^2 / \varepsilon_0 ] s$<br>la forza porta ad un'oscillazione armonica degli elettroni |
| Frequenza naturale del plasma | $\omega_p^2 = n_0 q_e^2 / ( \varepsilon_0 m_e ) = 4\pi e^2 n_0 / m_e$<br>la perturbazione del plasma dà origine a oscillazioni libere con frequenza $\omega_p$<br>effetti: una radioonda oltrepassa la ionosfera solo se ha frequenza più alta della frequenza del plasma, altrimenti viene riflessa verso terra |

**PARTICELLE COLLOIDALI IN UN ELETTROLITA**

| | |
|---|---|
| Colloide | sospensione in acqua di particelle cariche grandi dal punto di vista atomico |
| Potenziale | $\phi = \sigma D / \varepsilon_0$<br>D = Numero di Debye (misura lo spessore della guaina di ioni che circonda la particella carica)<br>se le guaine sono sottili, le particelle coagulano e il colloide precipita (es. salificazione) |

**GRIGLIA**

| | |
|---|---|
| Campo | è costante a grande distanza, periodico nei pressi della griglia<br>il campo dietro una rete è nullo: è possibile schermare con una rete anziché con una lamiera, eccetto che a distanze dalla griglia minori di due-tre volte il lato della maglia |

**ATMOSFERA**

| | |
|---|---|
| Campo elettrico | nell'aria c'è un campo elettrico verticale E di 100 V/m, il potenziale dell'aria è positivo e la superficie terrestre ha carica negativa; il campo produce una piccola corrente dal cielo verso terra rifornita dai raggi cosmici; a grandi altezze (50 km) il campo è molto debole e l'aria è un conduttore perfetto che mantiene costante la carica positiva |

| | |
|---|---|
| Temporali | la terra è caricata dai temporali sparsi per il mondo (un fulmine porta alla terra scariche negative) e si scarica nelle regioni in cui il tempo è buono<br>in una cella temporalesca l'aria è più fredda dell'ambiente circostante, e quando cade la pioggia si sparge aria fredda sulla superficie della terra e insorgono i fenomeni elettrici: si producono differenze di 20-30 milioni di volt che vincono la rigidità dielettrica dell'atmosfera |
| Fulmini | una nuvola con la zona inferiore più negativa della terra forma una scarica guida in cui le cariche negative scendono a terra: quando tutta la carica negativa precipita al suolo, si forma una scarica di ritorno di luce e calore che, provocando una rapida dilatazione dell'aria, produce il colpo del tuono; la corrente del fulmine è di circa 10000 A e trasporta 20 C |

## 4.1.1 Circuiti elettrici lineari

### Grandezze ed elementi di circuito

| | |
|---|---|
| Voltaggio | in un circuito oscillatorio elettrico, la differenza di potenziale tra i capi è il lavoro prodotto nel trasportare una carica attraverso il circuito |
| Resistenza | $R = V / I$ (coefficiente di resistenza) |
| Capacità | $C = q / V$ (coefficiente di rigidità) |
| Induttanza | $L = V / (dI/dt)$ (coefficiente di inerzia) |
| **CONDENSATORE** | |
| Definizione | elemento di circuito formato da due piastre cariche (una positivamente, l'altra negativamente), tra le quali si produce un campo elettrico (all'esterno il campo è nullo) |
| Forza elettrica | $F = \sigma / \varepsilon_0$<br>la forza è diretta dalla lastra positiva alla negativa,<br>$\sigma = q/A$ (densità di carica unitaria) |
| Differenza di potenziale (voltaggio) | $V = \Delta\varphi = \sigma d / \varepsilon_0 = q / C$<br>$d$ = distanza tra le lastre |
| Lavoro | $W = q \sigma d / \varepsilon_0$ |
| **RESISTENZA** | |
| Definizione | elemento di circuito che oppone resistenza al passaggio della corrente |
| Legge di Ohm | $V = R I = R (dq/dt)$ (una resistenza su cui è applicato un voltaggio è percorsa da una corrente elettrica proporzionale) |
| Lavoro per trasportare una carica | $W = q V$ |
| Potenza | $P = I^2 R$ (perdita di calore, es. lampade ad incandescenza) |
| **INDUTTORE** | |
| Induttore | elemento di circuito a spirale che percorso da corrente crea un campo magnetico<br>un campo magnetico variabile sviluppa il voltaggio:<br>$V = L (dI/dt) = L ( d^2q/dt^2 )$ *formula analoga alla legge di Newton* |

### Circuito elettrico oscillante

| | |
|---|---|
| Equazione | $L ( d^2q/dt ) + R ( dq/dt ) + q / C = V(t)$ |
| Soluzione dell'equazione | poniamo:<br>1. $\gamma = R / L$<br>2. $\omega_0^2 = 1 / ( L C )$ ( $\omega_0$ = frequenza di risonanza ) |
| Formula di risonanza | $q_c = V_c / L ( \omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega ) ]$ |
| Potenza media | $\langle P \rangle = ½ R I^2$<br>si provoca l'effetto Joule (riscaldamento della resistenza) |
| Fattore di merito | $Q = L \omega_0 / R$ |

### Transienti

| | |
|---|---|
| Equazione | $L ( d^2q/dt ) + R ( dq/dt ) + q / C = 0$ |
| Soluzione complessa | $x = e^{-\gamma t/2} ( A e^{i\omega(\gamma)t} + A^* e^{i\omega(\gamma)t} )$<br>$\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ |
| Soluzione con condizioni iniziali | $x = e^{-\gamma t/2} ( x_0 \cos \omega_\gamma t + [ ( v_0 + \gamma x_0 / 2 ) / \omega_\gamma ] \sin \omega_\gamma t ]$ |

## 4.2 MAGNETOSTATICA

### Forza e campo magneticostatico

**Magnetostatica**
tutto il magnetismo è prodotto da correnti
si parla di magnetostatica quando il moto delle cariche è approssimabile ad un flusso costante (es. circuiti senza condensatori)

**Equazioni di Maxwell**
le due equazioni di Maxwell sono valide se i campi sono statici, ovvero se sono costanti le densità di carica e le correnti;
I $\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0$
poiché la divergenza di $\underline{\mathbf{B}}$ è nulla, non esistono cariche magnetiche da cui emanare le linee del campo $\underline{\mathbf{B}}$
II $c^2 \nabla \wedge \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{j}} / \varepsilon_0$
poiché il rotore di $\underline{\mathbf{B}}$ è proporzionale alla densità di corrente, ci sono linee di campo magnetico che formano spire intorno alle correnti
poiché sono lineari in $\underline{\mathbf{B}}$ e in $\underline{\mathbf{j}}$ vale il principio di sovrapposizione

**Teorema di Stokes**
$\nabla \wedge \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \oint_{chiuso} \underline{\mathbf{E}} \cdot d\underline{\mathbf{s}} = 0$

**Legge di Ampère**
$\oint_{\Gamma} \underline{\mathbf{B}} \cdot d\underline{\mathbf{s}} = I_{\Gamma} / ( \varepsilon_0 c^2 )$
la circolazione di $\underline{\mathbf{B}}$ intorno ad una curva chiusa qualunque è uguale alla corrente I attraverso la curva chiusa, divisa per la costante $\varepsilon_0 c^2$
( legge analoga alla legge di Gauss, derivabile da $c^2 \nabla \wedge \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{j}} / \varepsilon_0$ )
ad un metro da una corrente di un ampere il campo magnetico ha un'intensità di $2 \cdot 10^{-7}$ weber / $m^2$

**Potenziale vettore**
in elettrostatica, dato che il rotore di $\underline{\mathbf{E}}$ è nullo, è possibile rappresentare $\underline{\mathbf{E}}$ come gradiente di un campo scalare $\phi$
in magnetostatica, dato che la divergenza di $\underline{\mathbf{B}}$ è nulla, è possibile rappresentare $\underline{\mathbf{B}}$ come il rotore del campo vettoriale $\underline{\mathbf{A}}$
$\underline{\mathbf{B}} = \nabla \wedge \underline{\mathbf{A}} = ( \partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z,\ \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x,\ \partial A_y/\partial z - \partial A_z/\partial y )$
$\underline{\mathbf{A}}$ è detto Potenziale vettore, e poiché anche $\underline{\mathbf{A}}' = \underline{\mathbf{A}} + \nabla\psi$ è un potenziale dello stesso campo poniamo (in magnetostatica) la condizione arbitraria: $\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = 0$
se il campo magnetico $\underline{\mathbf{B}}_0$ è uniforme in direzione z, e $\underline{\mathbf{r}}'$ è il vettore dall'asse z che forma un angolo retto con $\underline{\mathbf{A}}$, vale: $\underline{\mathbf{A}} = ½\, \underline{\mathbf{B}} \wedge \underline{\mathbf{r}}'$

**Potenziale vettore dovuto a correnti**
vale $\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} = - \underline{\mathbf{j}} / ( \varepsilon_0 c^2 )$ , equivalente all'equazione: $\nabla^2 \phi = - \rho / \varepsilon_0$
in analogia con l'elettrostatica una soluzione generale per l'equazione è: $\underline{\mathbf{A}}(1) = 1/(4\pi \varepsilon_0 c^2) \int \underline{\mathbf{j}}(2)\, dV_2 / r$

**Potenziale vettore di un circuito**
dato un circuito formato da fili di diametro trascurabile, ponendo I costante si ha: $\underline{\mathbf{A}}(1) = 1/(4\pi \varepsilon_0 c^2) \int I\, d\underline{\mathbf{s}}_2 / r_{12}$

**Legge di Biot e Savart**
in un circuito vale: $\underline{\mathbf{B}}(1) = 1/(4\pi \varepsilon_0 c^2) \int ( I\, \underline{\mathbf{e}}_{12} \wedge d\underline{\mathbf{s}}_2 / r_{12}^2 )$
questa formula dà il campo magnetico di fili percorsi da correnti

**Energia delle correnti costanti**
$U = ½ \int \underline{\mathbf{j}} \cdot \underline{\mathbf{A}}\, dV$
questa legge corrisponde a $U = ½ \int \rho\, \phi\, dV$ (elettrostatica), entrambe le equazioni non sono valide quando i campi variano con il tempo

### DIPOLO MAGNETICO

**Dipolo**
data una piccola spira piana (di qualunque forma)
porremo l'asse z perpendicolare al piano della spira

**Momento di dipolo magnetico**
$\mu = I \cdot$ ( area della spira)

**Potenziale vettore di un dipolo**
$A_x = - [ \mu / ( 4\pi \varepsilon_0 c^2 ) ]\ [ y / r^3 ]$
$A_y = - [ \mu / ( 4\pi \varepsilon_0 c^2 ) ]\ [ x / r^3 ]$
$A_z = 0$

| | |
|---|---|
| Campo di dipolo magnetico | $B_x = [\mu/(4\pi\varepsilon_0 c^2)]\,[3x\,z/r^5]$ |
| | $B_y = [\mu/(4\pi\varepsilon_0 c^2)]\,[3y\,z/r^5]$ |
| | $B_z = [\mu/(4\pi\varepsilon_0 c^2)]\,[1/r^3 - 3\,z^2/r^5]$ |
| Forze | un dipolo magnetico oltre a produrre campi magnetici subisce delle forze quando è posta nel campo di altre correnti |
| Momento di forza su un dipolo magn. | $\underline{\boldsymbol{\tau}} = \underline{\boldsymbol{\mu}} \wedge \underline{\mathbf{B}}$ |
| Energia di un dipolo magnetico | $\underline{\mathbf{U}}_{mecc} = -\underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \underline{\mathbf{B}}$ |
| | $\underline{\mathbf{U}}_{tot} = \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \underline{\mathbf{B}}$ |
| | l'energia meccanica corrisponde al lavoro meccanico fatto per portare la spira nel campo, la forza risultante è nulla soltanto in un campo magnetico uniforme |

## Esempi di campo magnetostatico

**FILO RETTILINEO A SEZIONE CILINDRICA**

| | |
|---|---|
| Campo | $B = [1/(4\pi\varepsilon_0 c^2)]\,(2I/r)$ |
| | $\underline{\mathbf{B}} = [1/(4\pi\varepsilon_0 c^2)]\,(2\,\underline{\mathbf{I}} \wedge \underline{\mathbf{e}}_r / r)$ |

**SELENOIDE**

| | |
|---|---|
| | un selenoide è una lunga bobina di filo avvolto a spirale (n = numero di spire per unità di lunghezza) |
| Campo esterno | il campo esterno è nullo |
| Potenziale vettore esterno | $\underline{\mathbf{A}} = [n\,I\,a^2/(2\,\varepsilon_0 c^2)]\,(1/r')$ |
| Campo interno | il campo interno è: $B_0 = n\,I/(\varepsilon_0 c^2)$ |

## 4.3 ELETTROMAGNETISMO

### Forze e campi

| | |
|---|---|
| Forza su una carica in movimento | $\begin{cases} F_x = q_2 ( E_x + v_y B_z - v_z B_y ) \\ F_y = q_2 ( E_y + v_z B_x - v_x B_z ) \\ F_z = q_2 ( E_z + v_x B_y - v_y B_x ) \end{cases}$<br>dove: $\underline{\mathbf{E}} = (E_x, E_y, E_z)$ campo elettrico; $\underline{\mathbf{B}} = (B_x, B_y, B_z)$ induzione magnetica; $\underline{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$ velocità della carica |
| Forza elettromagnetica | $\underline{\mathbf{F}} = q ( \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{v}} \wedge \underline{\mathbf{B}} )$<br>la forza su una carica elettrica (forza di Lorentz) dipende sia da dove si trova la carica, sia da quanto rapidamente si muove |
| Forza elettrica | dà la componente indipendente dal moto della carica, decresce come $1/r^2$ ed è descritta per mezzo del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ |
| Forza magnetica | dà la componente che dipende dalla velocità della carica, è descritta per mezzo del campo magnetico $\underline{\mathbf{B}}$ |
| Campi | una campo è una funzione matematica utilizzata per escludere l'azione a distanza, associando ad un punto un gruppo di numeri |
| Campo elettromagnetico | ad ogni punto dello spazio (x,y,z) sono associati i vettori $\underline{\mathbf{E}}$ (x,y,z,t) e $\underline{\mathbf{B}}$ (x,y,z,t) che rappresentano le forze risentite al tempo t da una carica<br><br>posta nel punto che non disturbi le cariche che producono i campi<br>il vettore $\underline{\mathbf{B}}$ è assiale (determinato da una regola di "mano destra") mentre $\underline{\mathbf{E}}$ è polare (non dipende da destra e sinistra)<br>Principio di sovrapposizione: $\underline{\mathbf{E}} = \Sigma \underline{\mathbf{E}}_i = \underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{E}}_2 + ... + \underline{\mathbf{E}}_n$<br>il campo totale è la somma vettoriale dei singoli campi |
| Moto di una particella | $d/dt [ m\underline{\mathbf{v}} / \sqrt{1-v^2/c^2} ] = q ( \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{v}} \wedge \underline{\mathbf{B}} )$ |

### Carica e corrente elettrica

| | |
|---|---|
| Densità di carica elettrica | $\rho$ = quantità di carica elettrica per unità di volume |
| Densità di corrente elettrica | $\underline{\mathbf{j}}$ = quantità di carica che attraversa l'unità d'area per unità di tempo<br>$\underline{\mathbf{j}} = N q \underline{\mathbf{v}}_{media}$ (N = numero di cariche per unità di volume) |
| Corrente elettrica | è dovuta a cariche (elettroni o altro) che si muovono producendo un effetto di flusso, rappresentato dal vettore densità di corrente |
| Intensità di corrente elettrica | carica che passa per unità di tempo attraverso una superficie S<br>$I = \int_S \underline{\mathbf{j}} \cdot \underline{\mathbf{n}}\, dS$ |
| Conservazione della carica elettrica | la conservazione della carica elettrica si può scrivere nella forma<br>$\nabla \cdot \underline{\mathbf{j}} = -\partial\rho/\partial t$<br>la carica elettrica è uno scalare invariante indipendente dal sistema di riferimento |

### Correnti e induzione

| | |
|---|---|
| Effetti elettromagnetici | nel 1820 si scoprirono alcuni effetti:<br>- correnti circolanti nei fili generano campi magnetici<br>- fili che portano corrente in un campo magnetico subiscono forze |

| | |
|---|---|
| Motore elettromagnetico | macchina che sfrutta le forze che agiscono su fili percorsi da corrente per produrre lavoro |
| Induzione | nel 1840 Faraday scopri che gli effetti elettromagnetici avvengono solo se qualcosa cambia nel tempo:<br>- dati sue fili paralleli, se la corrente varia in uno viene indotta una corrente nell'altro<br>- se un magnete è spostato vicino ad un circuito elettrico, viene generata in esso una corrente<br>in questi casi c'è una spinta integrata in una direzione sugli elettroni lungo il circuito completo (forza elettromotrice) |
| Forza elettromotrice (f.e.m.) | componente tangenziale della forza per unità di carica integrata una volta lungo tutto il circuito |
| Regola del flusso (Faraday) | quando il flusso magnetico che attraversa una spira cambia con il tempo, la f.e.m. è uguale alla variazione del flusso per unità di tempo<br>1. campo magnetico fisso, circuito mobile:<br>dalla forza magnetica $\underline{\mathbf{v}} \wedge \underline{\mathbf{B}}$ deriva la f.e.m.: $\mathcal{E} = w\, B\, (dL/dt)$<br>2. circuito stazionario, campo magnetico variabile:<br>c'è un campo elettrico: $\underline{\mathbf{E}}$ tale che $\mathcal{E} = -(\partial/\partial t)$ (flusso su S)<br>i due effetti sono indipendenti |
| Generatore | in un motore elettromagnetico se si gira la spira per mezzo di una forza esterna si crea una f.e.m. nel circuito della spira, e il motore diventa generatore; se i capi della spira che ruota sono collegati a fili esterni si genera corrente alternata, se il collegamento si inverte ogni mezza rotazione si genera corrente continua |
| Trasformatore | apparecchio che per mezzo di due bobine (di cui una collegata ad un generatore) produce una f.e.m. maggiore o minore a seconda della variazione del flusso e del numero delle spire |
| Autoinduzione | effetto per cui in una bobina una corrente variabile produce un campo magnetico variabile, il cui flusso induce una f.e.m. |
| Legge di Lenz | la f.e.m. tende ad opporsi a qualunque variazione del flusso (in particolare quando varia corrente in una bobina si forma una f.e.m. che si oppone al cambiamento del campo magnetico: la corrente in un circuito con autoinduzione possiede un'inerzia) |
| Betatrone | acceleratore di elettroni per mezzo di un campo magnetico variabile |

**GENERATORE A CORRENTE ALTERNATA**

| | |
|---|---|
| Generatore a c.a.<br>Forza elettromotrice | data una bobina a N spire che ruota con velocità angolare uniforme $\omega$, se S è l'area della bobina e $\vartheta=\omega t$ è l'angolo tra i campo magnetico e la normale al piano della bobina si ha:<br>flusso: $B\, S \cos \omega t$<br>f.e.m.: $\mathcal{E} = N\, B\, S\, \omega \sin \omega t$ |
| Voltaggio e corrente | collegando il generatore ad un circuito esterno che permette il passaggio di corrente (R = resistenza del circuito), la f.e.m. mantiene la differenza di potenziale impedendo ai fili di scaricarsi<br>differenza di potenziale: $V = N\, B\, S\, \omega \sin \omega t = V_0 \sin \omega t$<br>corrente: $I = \mathcal{E}/R = V_0 \sin \omega t \,/\, R$<br>potenza comunicata all'intero circuito: $P = \mathcal{E}\, I$ (tutta l'energia meccanica consumata nel generatore appare come energia elettrica nel circuito) |

**INDUTTANZA**

f.e.m. e induttanza

in un trasformatore variando la corrente nella bobina 1 varia il flusso magnetico e si induce una f.e.m. nella bobina 2:
$\mathcal{E}_2 = \mathcal{M}_{21}\, dI_1/dt$
$\mathcal{M}_{21}$ (induttanza mutua) = $- N_1N_2S_1/\, \varepsilon_0 c^2 \ell_1$
(N = numero di spire della bobina, $\ell$ = lunghezza della spira,
S = area della sezione normale)
inviando corrente nella bobina 2 si induce nella bobina 1 la f.e.m.:
$\mathcal{E}_1 = \mathcal{M}_{12}\, dI_2/dt$
vale: $\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{21} = \mathcal{M}$

Autoinduttanza

se nelle due bobine ci sono correnti simultanee, la f.e.m. in ogni bobina è proporzionale alla variazione di corrente di entrambe e vale:
$\mathcal{E}_2 = \mathcal{M}_{21}\, dI_1/dt + \mathcal{M}_{22}\, dI_2/dt$
$\mathcal{E}_1 = \mathcal{M}_{12}\, dI_2/dt + \mathcal{M}_{11}\, dI_1/dt$
i valori $\mathcal{L}_1 = -\mathcal{M}_{11}$ e $\mathcal{L}_2 = -\mathcal{M}_{22}$ sono detti autoinduttanze
ogni bobina ha la sua autoinduttanza $\mathcal{L}$ e la f.e.m. che ne deriva è proporzionale alla variazione per unità di tempo nella corrente
$\mathcal{E} = -\mathcal{L}\, dI/dt$ (poiché si oppone al cambiamento della corrente è detta forza contro-elettromotrice)
per variare la corrente in una bobina si deve vincere l'inerzia data dall'autoinduttanza collegando la bobina ad una sorgente esterna (batteria o generatore), e vale: $V = \mathcal{L}\, dI/dt$

Induttanza ed energia

l'energia che si richiede ad una sorgente per vincere la f.e.m. di autoinduzione (trascurando la resistenza) è: $U = ½\, \mathcal{L}\, I^2$
dato un sistema finito si ha:
energia magnetostatica: $U = (\varepsilon_0/2) \int \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{B}}\, dV$
energia elettrostatica: $U = (\varepsilon_0/2) \int \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}\, dV$
data una bobina isolata vale: $\mathcal{L} = \pi r^2 n^2 \ell /(\varepsilon_0 c)$
(n = numero di giri della bobina per unità di lunghezza,
$\ell$ = lunghezza, r = raggio di avvolgimento)

## Equazioni di Maxwell

Notazione vettoriale

(contengono l'intero elettromagnetismo)

I. $\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = \rho / \varepsilon_0$
II. $\nabla \wedge \underline{\mathbf{E}} = -\partial \underline{\mathbf{B}}/\partial t$ (legge di Faraday)
III. $\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0$
IV. $c^2\, \nabla \wedge \underline{\mathbf{B}} = \partial \underline{\mathbf{E}}/\partial t + \underline{\mathbf{j}} / \varepsilon_0$

*commenti*

data una superficie S non chiusa avente per contorno la curva C:

I. il flusso di **E** attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla carica totale all'interno
II. la circolazione di **E** intorno alla curva C è data dalla derivata del flusso di **B** attraverso la superficie S; questa legge regola il campo elettrico associato ad un campo magnetico
III. il flusso di **B** attraverso una superficie chiusa è nullo
IV. la circolazione di **B** intorno alla curva C è proporzionale alla somma tra la derivata del flusso di **E** attraverso S e il flusso della corrente attraverso S diviso per una costante; accettando la legge si ottiene la conservazione della carica

Elettricità e magnetismo

il magnetismo è un effetto relativistico dell'elettricità, finché cariche e correnti sono statiche elettricità e magnetismo sono fenomeni distinti

(la separazione dipende dal sistema di riferimento: dato un filo percorso da corrente ed una particella carica, sulla particella nel sistema in cui il filo è in quiete c'è una forza magnetica, nel sistema in cui la carica è in quiete c'è una forza elettrica)

Equazioni dell'elettrostatica

$\nabla\cdot \underline{\mathbf{E}} = \rho / \varepsilon_0$

$\nabla\wedge \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$

una campo elettrostatico è un campo vettoriale a rotore nullo e divergenza assegnata

Equazioni della magnetostatica

$\nabla\wedge \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{j}} / ( \varepsilon_0 c^2 )$

$\nabla\cdot \underline{\mathbf{B}} = 0$

una campo magnetico è un campo vettoriale a divergenza nulla e rotore assegnato

CONSEGUENZE DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL

Propagazione del campo

data una carica laminare infinita in quiete, se messa in movimento in direzione y, si foma la corrente $\underline{\mathbf{j}}$ e si genera un campo magnetico $\underline{\mathbf{B}}$ di modulo $B = j / ( 2 \varepsilon_0 c^2 )$

i campi $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{B}}$ al tempo t sono uniformi fino alla distanza $x = c\, t$ e nulli al di la di questa, quindi avanzano come un'onda con un fronte che si muove a velocità uniforme $c = 3.00 \cdot 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$)

per qualunque onda elettromagnetica vale:

- i campi magnetico $\underline{\mathbf{B}}$ ed elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ sono perpendicolari alla direzione del moto del fronte d'onda
- i vettori $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{B}}$ sono perpendicolari fra loro
- $E = c\, B$ (per la legge di Faraday)

Potenziali

dato che $\nabla\wedge \underline{\mathbf{E}}$ non è sempre nullo, il potenziale $\phi$ è un a grandezza variabile con il tempo da usare insieme al potenziale magnetico $\underline{\mathbf{A}}$

i campi $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{B}}$ sono ottenibili da $\phi$ e $\underline{\mathbf{A}}$:

(III) $\nabla\cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 \Rightarrow \underline{\mathbf{B}} = \nabla\wedge \underline{\mathbf{A}}$

(II) $\nabla\wedge \underline{\mathbf{E}} = -\partial\underline{\mathbf{B}}/\partial t \Rightarrow \underline{\mathbf{E}} = -\nabla\phi - \partial\underline{\mathbf{A}}/\partial t$

utilizzando le equazioni precedenti si ottiene:

(I) $\nabla\cdot \underline{\mathbf{E}} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow -\nabla^2 \phi - \partial( \nabla\cdot \underline{\mathbf{A}} )/\partial t = \rho/\varepsilon_0$ (mette in rapporto i potenziali con le sorgenti)

(IV) $c^2\, \nabla\wedge \underline{\mathbf{B}} = \partial\underline{\mathbf{E}}/\partial t + \underline{\mathbf{j}}/\varepsilon_0 \Rightarrow$

$$-c^2\, \nabla^2\, \underline{\mathbf{A}} + c^2\, \nabla( \nabla\cdot \underline{\mathbf{A}} ) + \partial( \nabla\phi )/\partial t\ \partial^2\underline{\mathbf{A}}/\partial t^2 = \underline{\mathbf{j}}/\varepsilon_0$$

ponendo la condizione: $c^2\, \nabla\cdot \underline{\mathbf{A}} + \partial\phi/\partial t = 0$ (calibro di Lorentz) le equazioni differenziali per $\phi$ e $\underline{\mathbf{A}}$ hanno la forma più semplice:

$$\nabla^2 \phi - (1/c^2)\, \partial^2\phi/\partial t^2 = - \rho / \varepsilon_0$$

$$\nabla^2\, \underline{\mathbf{A}} - (1/c^2)\, \partial^2\underline{\mathbf{A}}/\partial t^2 = - \underline{\mathbf{j}} / ( \varepsilon_0\, c^2 )$$

sviluppando le equazioni per $\phi$, $A_x$, $A_y$, e $A_z$ si ottiene:

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 + \partial^2\phi/\partial z^2 - (1/c^2)\, \partial^2\phi/\partial t^2 = - \rho / \varepsilon_0$$

$$\partial^2A_x/\partial x^2 + \partial^2A_x/\partial y^2 + \partial^2A_x/\partial z^2 - (1/c^2)\, \partial^2A_x/\partial t^2 = - \underline{j}_x / ( \varepsilon_0\, c^2 )$$

$$\partial^2A_y/\partial x^2 + \partial^2A_y/\partial y^2 + \partial^2A_y/\partial z^2 - (1/c^2)\, \partial^2A_y/\partial t^2 = - \underline{j}_y / ( \varepsilon_0\, c^2 )$$

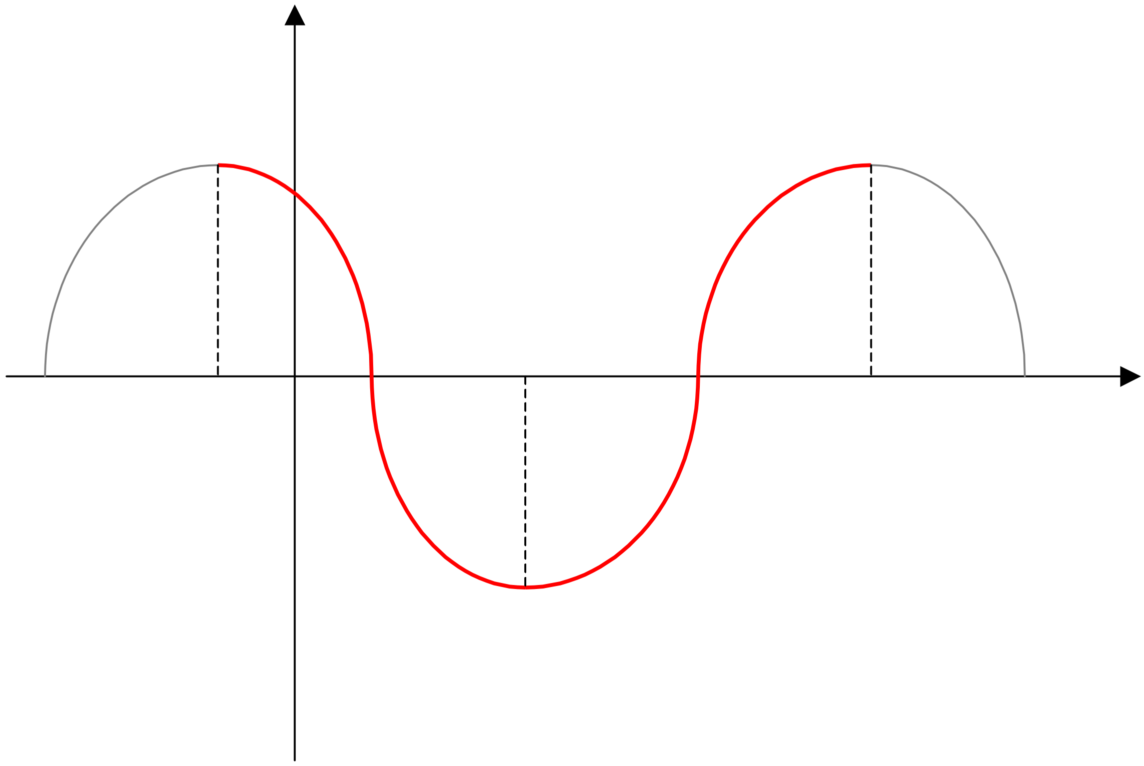
$$\partial^2A_z/\partial x^2 + \partial^2A_z/\partial y^2 + \partial^2A_z/\partial z^2 - (1/c^2)\, \partial^2A_z/\partial t^2 = - \underline{j}_z / ( \varepsilon_0\, c^2 )$$

queste equazioni descrivono la propagazione di onde nelle tre dimensioni: una volta risolte si possono ottenere i campi $\underline{\mathbf{E}}$ e $\underline{\mathbf{B}}$ (queste equazioni sono più facili da trattare rispetto alle equazioni di Maxwell)

# La fisica di Feynmann
# Le equazioni dell'elettromagnetismo

| EQUAZIONI DELLA STATICA | EQUAZIONI DELLA DINAMICA |
|---|---|
| **forza** | |
| $\mathbf{F} = q\,\mathbf{E}$ | $\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ *(forza di Lorentz)* |
| $\mathbf{F} = [1/(4\pi\varepsilon_0)]\,(q_1 q_2 / r^2)\,\mathbf{e}$ *(legge di Coulomb)* | |
| **campo elettrico** | |
| $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ *(legge di Gauss)* | $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ *(legge di Gauss)* |
| $\nabla\wedge\mathbf{E} = \mathbf{0}$ | $\nabla\wedge\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ *(legge di Faraday)* |
| $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ | $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ |
| $\mathbf{E}(1) = 1/(4\pi\varepsilon_0) \int (\rho(2)\,\mathbf{e}_{12}/r_{12}^2)\,dV_2$ | |
| **campo magnetico** | |
| $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ | $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ |
| $c^2\,\nabla\wedge\mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0$ *(legge di Ampère)* | $c^2\,\nabla\wedge\mathbf{B} = \mathbf{j}/\varepsilon_0 + \partial\mathbf{E}/\partial t$ |
| $\mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{A}$ | $\mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{A}$ |
| $\mathbf{B}(1) = 1/(4\pi\varepsilon_0 c^2) \int (\mathbf{j}_2 \wedge \mathbf{e}_{12}/r_{12}^2)\,dV_2$ | |
| **potenziali** | |
| $\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0$ *(equazione di Poisson)* | $\nabla^2\phi - (1/c^2)\,\partial^2\phi/\partial t^2 = -\rho/\varepsilon_0$ |
| $\nabla^2\mathbf{A} = -\mathbf{j}/(\varepsilon_0 c^2)$ | $\nabla^2\mathbf{A} - (1/c^2)\,\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 = -\mathbf{j}/(\varepsilon_0 c^2)$ |
| [ condizione: $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ ] | [ condizione: $c^2\,\nabla\cdot\mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$ ] |
| *soluzione generale:* | *soluzione generale:* |
| $\phi(1) = 1/(4\pi\varepsilon_0) \int (\rho(2)/r_{12})\,dV_2$ | $\phi(1,t) = 1/(4\pi\varepsilon_0) \int (\rho(2,t')/r_{12})\,dV_2$ |
| $\mathbf{A}(1) = 1/(4\pi\varepsilon_0 c^2) \int (\mathbf{j}(2)/r_{12})\,dV_2$ | $\mathbf{A}(1,t) = 1/(4\pi\varepsilon_0 c^2) \int (\mathbf{j}(2,t')/r_{12})\,dV_2$ |
| | con $t' = t - r_{12}/c$ (istante anteriore) |
| **energia** | |
| $U = \frac{1}{2}\int \rho\,\phi\,dV + \frac{1}{2}\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\,dV$ | $U = \int [(\varepsilon_0/2)\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + (\varepsilon_0 c^2/2)\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}]\,dV$ |

# Onda elettromagnetica: $x = x_0 \cos \omega ( t + \Delta )$



| | | |
|---|---|---|
| posizione | $x = x_0 \cos \omega ( t + \Delta )$ | |
| velocità | $v = - \omega x_0 \sin \omega ( t + \Delta )$ | |
| accelerazione | $a = - \omega^2 x_0 \cos \omega ( t + \Delta ) = - \omega^2 x$ | |
| ampiezza | $x_0$ | (massimo raggiunto) |
| fase | $\varphi = \omega ( t + \Delta )$ | |
| sfasamento | $\Delta$ | |
| frequenza di osc. | $\omega = d\varphi/dt$ | (numero di onde che stanno in $t=2\pi$) |
| periodo | $t_0 = 2\pi/\omega$ | (tempo di un'oscillazione completa) |
| frequenza | $\nu = 1 / t_0$ | (numero di onde che stanno in $t=1$) |
| numero d'onda | $k = \partial\varphi/\partial r$ | (numero di onde che stanno in $r=2\pi$ m) |
| lunghezza d'onda | $\lambda = 2\pi/k$ | (lunghezza di un'oscillazione completa) |

$k = c/\omega \quad \Rightarrow \quad \lambda = c/\nu = c\, t_0 = 2\pi c/\omega$