INTEGRAZIONE

Somma inferiore $s(f{:}\sigma) = \sum e_k\,(x_k - x_{k-1})$ σ = scomposizione di [a,b] ; $e_k = \inf f(x),\ x \in (x_{k-1}, x_k)$

Somma superiore $S(f;\sigma) = \sum E_k\,(x_k - x_{k-1})$ σ = scomposizione di [a,b] ; $E_k = \sup f(x),\ x \in (x_{k-1}, x_k)$

INTEGRALE DEFINITO

$\int_a^b f(x)\,dx$ = elemento di separazione tra gli insiemi delle $S(f{:}\sigma)$ e delle $s(f{:}\sigma)$

$f(x)$ integrabile *se* $\forall\varepsilon>0\ \exists\sigma_\varepsilon : S(f{:}\sigma) - s(f{:}\sigma) < \varepsilon$

$f(x)$ continua in [a,b] $\Rightarrow$ $f(x)$ integrabile in [a,b]

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \ ;\ \int_a^b C\,f(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \ ;\ \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Media integrale $\mu = \dfrac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx$

Primitiva: Φ primitiva di $f(x)$ se $\Phi'(x) = f(x)$

TEOREMA FONDAMENTALE f: [a,b] continua, Φ primitiva di $f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$

INTEGRAZIONE PER PARTI $\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE $f: [a,b] \to \Re$, $\Phi[\alpha,\beta] \to [a,b]$ continue, $\Phi(\alpha) = a$, $\Phi(\beta) = b \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,dt$$

FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Volume di un solido di rotazione: intorno all'asse delle ascisse: $V(x) = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$

intorno all'asse delle ordinate: $V(x) = 2\pi\int_{x_0}^x x\,f(x)\,dx$

Lunghezza di una curva $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

$*$ f: [a,b] continua, [a,b] suddivisa in N parti uguali dai punti x_i ; h = b-a / n

Formula dei trapezi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(f,h) + O(h^2) \ ;\ T(f,h) = (h/2)\,(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{N-1} + f_N)$$

Formula del punto medio:
(o della tangente)

$$\int_a^b f(x)\,dx = M(f,h) + O(h^2) \ ;\ M(f,h) = h\sum f(z_i)\ ,\ z_i = (x_{i-1}+x_i)/2$$

INTEGRALI NOTEVOLI

$\int f^n \, df = f^{n+1} / (n+1)$ $\qquad \int df / f = \log f$

$\int x^n \, dx = x^{n+1} / (n+1)$ $\qquad \int dx / x = \log |x|$

$\int 1/x^n \, dx = 1 / (1-n) \, x^{n+1}$

$\int dx / (a^2+x^2) = (1/a) \arctan x/a$ $\qquad \int dx / \sqrt{a^2 - x^2} = \arcsin x/a$

$\int dx / (a^2 - x^2) = (1/2a) \log | (x-a)/(x+a) |$ $\qquad \int dx / \sqrt{x^2 \pm a^2} = \log | x \pm \sqrt{x^2 \pm a^2} |$

$\int dx / (x^2 - a^2) = (1/2a) \log | (a+x)/(a-x) |$

$$\int dx / (ax^2+bx+c) = \begin{cases} (1/\Delta) \log \left| \dfrac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{ax+b+\sqrt{\Delta}} \right| & (\Delta>0) \\ (2/-\Delta) \arctan (2ax+b)/\sqrt{-\Delta} & (\Delta<0) \end{cases}$$

$\int \sin ax \, dx = - (1/a) \cos ax$ $\qquad \int dx / \sin ax = (1/a) \log | \tan ax/2 |$

$\int \cos ax \, dx = (1/a) \sin ax$ $\qquad \int dx / \cos ax = (1/a) \log | \tan ax/2 + \pi/4 |$

$\int \sin^2 x \, dx = (x - \sin x \cos x) / 2$ $\qquad \int dx / \sin^2 ax = - (1/a) \cot ax$

$\int \cos^2 x \, dx = (x + \sin x \cos x) / 2$ $\qquad \int dx / \cos^2 ax = (1/a) \tan ax$

$\int \tan ax \, dx = - (1/a) \log | \cos ax |$

$\int \cot ax \, dx = (1/a) \log | \sin ax |$

$\int e^x \, dx = e^x$ $\qquad \int \log x \, dx = x \log |x| - x$

$\int a^x \, dx = a^x / \log a$ $\qquad \int \log_a x \, dx = ?$

$$\int e^{ax} \sin bx = \frac{a \sin bx - b \cos bx \;\; e^{ax}}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax} \sin bx = \frac{a \sin bx - b \cos bx \;\; e^{ax}}{a^2 + b^2}$$